



TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

**ANDREI PUKKILA**

**GNSS satelliitin radan ennustamisen virhetermien analysointi**

Diplomityö

Tarkastajat: Simo Ali-Löytty

ja Juha Ala-Luhtala

Tarkastajat ja aihe hyväksytty Tieto- ja  
sähkötekniikan tiedekuntaneuvoston  
kokouksessa 5.11.2014

# TIIVISTELMÄ

TAMPEREEN TEKNILLINEN YLIOPISTO

Signaalinkäsittelyn ja tietotekniikan koulutusohjelma

**ANDREI PUKKILA: GNSS satelliitin radan ennustamisen virhetermien analysointi**

Diplomityö, 65 sivua, 13 liitesivua

Kesäkuu 2015

Pääaine: Paikannus ja navigointi

Tarkastajat: Simo Ali-Löytty ja Juha Ala-Luhtala

Avainsanat: GNSS, GPS, GLONASS, Beidou, rataennuste, suhteellisuusteoria, säteilypaine, maankuoren vuorovaihtelut

Satelliittien rataennusteille on monia käyttökohteita. Yksi näistä on GNSS satelliittien almanakkadatan laskeminen paikallisessa vastaanottimessa. Käyttämällä valmiiksi laskettua almanakkaa, GNSS paikantaminen voidaan aloittaa nopeammin, joskin hieman heikentyneellä tarkkuudella. Lisäksi ylimääräisellä almanakalla on hyötynsä, jos virallista almanakkaa ei saada ladattua vastaanottimeen. Tämä diplomityö sisältää tutkimuksen GNSS satelliittien rataennusteiden tarkentamisesta.

Tampereen Teknillisellä yliopistolla aikaisemmin kehitetty satelliittien rataennustusmalli otti huomioon Maan, Kuun ja Auringon gravitaatiovuorovaikutukset sekä Auringon säteilypaineen jo ennen tämän tutkimuksen aloittamista. Kyseiset voimat riittävätkin perustason rataennusteiden tekemiseen. Kun rataennusteita pyritään parantamaan tästä eteenpäin, on otettava huomioon pienempiä voimia, jotka vielä usein kumoavat osin toisiaan. Ennustustarkkuuden kasvattaminen tuottaakin huomattavan lisäyksen laskennalliseen taakkaan. Siispä tässä työssä käsitellään myös arvioita laskenta-aikojen pitenemisestä.

Työn tutkimus keskittyy erityisesti maankuoren vuorovaihteluiden, suhteellisuusteoreettisten korjausten ja muiden planeettojen gravitaatiovuorovaikutuksiin. Lisäksi tutkimme Jet Propulsion Laboratoryn aurinkokunnan almanakkadatan vertautuvuutta analyttisiin taivaankappaleiden sijaintiratkaisuihin. Muut voimat, joita työssä kokeiltiin liittää mukaan rataennusteiden laskemiseen olivat: Maapallon tuottama säteilypaine, Auringon säteilypaineen riippuvuus satelliitin asennosta ja satelliitin suuntaavan antennin tuottama työntövoima. Käytössä ollut empiirinen, hyvin kalibroitu, kaksiparametrinen säteilypainemalli ottaa osittain huomioon tuntemattomia voimia jo ennestään.

Tutkimuksesta ilmeni, etteivät lisätyt pienet voimat parantaneet ennusteita paljoa. Nähtävästi Auringon säteilypaineelle tulisi rakentaa tarkempi malli, jotta tässä työssä tutkitut pienet voimavuorovaikutukset alkaisivat näkyä paremmin. Ennustustarkkuus on kuitenkin riittävä noin kahden viikon rataennusteiden tekemiseen ja suurempi ongelma almanakan paikalliseen laskemiseen muodostuukin kellovirheistä.

# ABSTRACT

TAMPERE UNIVERSITY OF TECHNOLOGY

Master's Degree Programme in Signal Processing and Information Technology

**ANDREI PUKKILA : GNSS satellite orbit prediction error analyzation**

Master of Science Thesis, 65 pages, 13 Appendix pages

June 2015

Major: Navigation and Positioning

Examiners: Simo Ali-Löytty and Juha Ala-Luhtala

Keywords: GNSS, GPS, GLONASS, Beidou, orbit prediction, theory of relativity, radiation pressure, solid tides of the Earth.

Calculating satellite orbit predictions is important for many modern systems. One way to benefit from satellite orbit predictions is in portable GNSS receivers. When a portable receiver calculates satellite orbits itself, the *Time-to-First-Fix* (TTFF) can be achieved more quickly and available broadcast ephemeris can be augmented in difficult conditions. This MSc Thesis focused in researching suitable ways to enhance the accuracy of satellite orbit predictions in portable devices.

The force model of the orbit prediction algorithm developed by Tampere University of Technology took account the gravitational effects of Earth, Moon and Sun and also the solar radiation pressure of Sun before this research began. A force model of this caliber is enough for basic level predictions, depending on the accuracy of the solar radiation pressure force. If we desire to enhance the prediction accuracy further, we need to take account multiple different forces that often counteract each other. Therefore it is understandable why increasing accuracy generates an overall slowdown in prediction algorithm speed. For this reason, our research also covers the computational speed changes for each tested force model enhancement.

This research focused in detail for enhancing the force model. Considered additional forces included planetary gravities from Jupiter and Venus, solid tides and some corrections that arise from general relativity coordinate transforms. We also studied how more accurate JPL planetary ephemeris can assist in planetary body coordinate calculations. Other tested forces included: Earth albedo radiation, Solar radiation pressure dependency on satellite attitude and satellite antenna thrust. It proved to be likely that our two-parameter Solar radiation pressure force modelled partly these small forces even before this research began.

Added small forces proved almost negligible during this research. It can be assumed that our radiation pressure model is too inaccurate for higher precision orbit estimates. Current accuracy of our orbit predictor algorithm is enough for 2 week predictions. Clock errors will prove to be greater problem than orbit prediction accuracy.

## ALKUSANAT

Aloitin diplomityön tekemisen kesäkuussa 2014. Työskentelin osa-aikaisesti TTY:n paikannusryhmän yhtenä työntekijänä.

Haluan kiittää kaikkia työntekooni osallistuneita TTY:n paikannusryhmän jäseniä. Erityiskiitos kuuluu työn ohjaajille, Juha Ala-Luhtalalle ja Simo Ali-Löytylle. Heistä jälkimmäinen toimi myös esimiehenäni. Diplomityön keskivaiheiden aikana tein myös paljon yhteistyötä Zhang Xialongin kanssa, joten kiitokset kuuluvat hänellekin. Laitoksen vastuuhenkilö, Robert Piché ansaitsee myös kiitokset osallistumisesta tutkimukseni etenemiseen. Hän mainitsi monta hyvää kirjallisuusviitettä ja antoi useampia pienempiä hyödyllisiä vinkkejä tutkimukseen liittyen. En halua myöskään unohtaa Juha Herralan antamaa apua Tutgridin käytön aloittamisessa. Tutgridin avulla satelliittirataennusteiden laskeminen nopeutui huomattavasti, kun pystyi laskemaan useampia ennusteita samanaikaisesti rinnakkaislaskentaa hyödyntäen. Myös Helena Leppäkoski antoi käyttööni joitakin valmiita Matlab-funktioita, joilla sain piirrettyä tulokappaleen boxplot-kuvaajat ja haluan antaa kiitokseni myös hänen avustaan.

Diplomityön kirjoituksen aikana erityisen avuliaaksi ja ahkeraksi osoittautui Ville Huttunen, jolta sain eri GNSS järjestelmien satelliittien sijaintitietojen almanakkadatan. Esimerkkinä hänen avuliaisuudestaan mainittakoon, että lähetin eräänä myöhäisenä lauantai-iltana sähköpostia hänelle pyytäen Beidou-almanakkaa satelliittien sijainneista ja varhain sunnuntiaamuyöstä käytettävissäni oli jo pyytämäni data, pakattuna valmiiksi mukaviin .mat tiedostoihin.

Itse työ oli oman fysiikan harrastuneisuuteni puolesta erittäin mielekäs tehdä ja työn kirjoittamisen aikana tuli opittua mukavasti lisää fysiikan teorioita, vaikka diplomityöaihe saatiinkin matematiikan laitokselta. Ennen tätä tutkimusta en ollut perehtynyt erityisen paljoa kattavien tilastollisten analyysien tekemiseen. Paikannusryhmän jäseniltä sai kuitenkin hyviä vinkkejä moneen otteeseen työtä tehdessä ja työn lopputulos oli ainakin allekirjoittaneen mielestä varsin tyydyttävä. Jos ei olisi ollut, tuskin tämän tutkimuksen pohjalta kirjoitettua englanninkielistä konferenssipaperia olisi hyväksytty ICL-GNSS -tapahtumaan Göteborgiin esiteltäväksi. Haluan antaa myös vielä toisen erityiskiitoksen Juha Ala-Luhtalalle hänen osallistumisestaan tuon paperin ensimmäisten kappaleiden kirjoittamiseen muun hänen antamansa ohjauksen lisäksi.

# SISÄLLYS

1. Johdanto . . . . .	1
2. Satelliittien rataennustusmalli . . . . .	3
2.1 Voimamalli . . . . .	3
2.1.1 Maan gravitaatio . . . . .	5
2.1.2 Kuun ja Auringon gravitaatio . . . . .	8
2.1.3 Auringon säteilypainne . . . . .	9
2.2 Koordinaatistomuunnokset . . . . .	11
2.3 Numeerinen integrointi . . . . .	13
2.3.1 Runge-Kutta-Nyström integrointi . . . . .	13
2.3.2 Gauss-Jackson integrointi . . . . .	15
3. Voimamallin tarkentaminen . . . . .	20
3.1 Maankuoren vuorovaihtelut . . . . .	20
3.2 JPL almanakkadatan käyttö . . . . .	22
3.3 Suhteellisuusteoriakorjaus maapallon gravitaatiolle . . . . .	25
3.4 Maapallon säteilypainne . . . . .	26
3.5 Antennin säteilyn työntövoima . . . . .	29
3.6 Auringon säteilypainne . . . . .	29
4. Muita hyvin pieniä korjauksia . . . . .	32
4.1 Suhteellisuusteoriakorjaus Auringon gravitaatiolle . . . . .	32
4.2 Gravitaation vaikutus kellon käyntinopeuteen . . . . .	33
4.3 Säteilyn ja gravitaation nopeus on valonnopeus . . . . .	34
4.4 Satelliitin liikkeen vaikutus Auringon säteilypainneeseen . . . . .	34
4.5 Auringon säteilypainneen muutokset ajan suhteen . . . . .	36
5. GNSS paikannusjärjestelmät . . . . .	37
5.1 GPS - <i>Global Positioning System</i> . . . . .	37
5.2 GLONASS - <i>Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema</i> . . . . .	38
5.3 Beidou - <i>Beidou Weixing Daohang Xitong</i> . . . . .	39
5.4 Satelliittien ratojen määrittäminen . . . . .	40
6. Parannetun voimamallin vaikutus rataennusteisiin . . . . .	41
6.1 Laskettujen ennusteiden valintakriteerit . . . . .	41
6.2 Ennusteet GPS satelliiteilla . . . . .	43
6.3 Ennusteet GLONASS satelliiteilla . . . . .	48
6.4 Ennusteet Beidou satelliiteilla . . . . .	50
6.5 Yhteenvedo korjausten toimivuudesta ja RTN virhe . . . . .	53
6.6 Laskenta-ajan pidentyminen . . . . .	57
7. Yhteenvedo . . . . .	59
Lähteet . . . . .	61

A. Liitetaulukot rataennustustilastoista . . . . .	66
B. Liite solid tide -korjauksen ohjelmakoodista . . . . .	74
C. Liite DE202 almanakkatiedoston lukevasta ohjelmakoodista . . . . .	76

# TERMIT JA NIIDEN MÄÄRITELMÄT

Albedo	Heijastavuutta kuvaava termi. Tässä tutkimuksessa kuvaa aina taivaankappaleiden aurinkopuolen heijastamaa säteilypainetta.
AU	<i>Astronomical Unit</i> eli Astronominen yksikkö
Beidou	Kiinan satelliittipaikannusjärjestelmä, joka on nimetty sikäläisen Ota-va -sanon mukaan
EGM	<i>Earth Gravitational Model</i>
GDOP	<i>Geometric Dilution of Precision</i>
GFZ	<i>GeoForschungsZentrum Potsdam</i>
GNSS	<i>Global Navigation Satellite System</i>
GLONASS	<i>Globalnaja Navigatsionnaja Sputnikovaja Sistema</i>
GPS	<i>Global Positioning System</i>
ICRS	<i>International Celestial Reference System</i>
ICRF	<i>International Celestial Reference Frame</i>
IGS	<i>International GNSS service</i>
IERS	<i>International Earth Rotation Service</i>
JPL	<i>Jet Propulsion Laboratory</i>
RTN	<i>Radial Transverse Normal</i> (virhe- ja koordinaatistotyyppi)
SISRE	<i>Signal In Space Range Error</i> (virhetyyppi)
ITRS	<i>International Terrestrial Reference System</i>
TIRS	<i>Terrestrial Intermediate Reference System</i> Ennusteita tehtäessä käytettävä maapallokeskeinen inertiaalikoordinaatisto
TTFF	<i>Time-To-First-Fix</i> eli aika, joka GNSS vastaanotin vaatii ensimmäisen paikkaestimaatin muodostamiseen
$\alpha_n$	Säteilypainevoiman laskennan empiirisesti määätyt parametrit
$\alpha_{alb,n}$	Albedon säteilypaineen laskennan empiirisesti määätyt parametrit
$\alpha_{n,m}$	Gauss-Jacksonin kertoimet

$\beta_{n,m}$	Summatut Adamsin kertoimet
$\gamma$	Maapallon ja Auringon väliin jäävä kulma satelliitin sijainnissa
$\delta_{0m}$	Kroneckerin deltafunktio
$\Delta \mathbf{a}_{g,\text{Maa}}$	Suhteellisuusteoreettinen maapallon gravitaation tuottaman putoamiskiihtyvyyden korjaus liikkuvalla satelliitille
$\Delta \mathbf{a}_{g,\text{Aurinko}}$	Suhteellisuusteoreettinen Auringon gravitaation tuottaman putoamiskiihtyvyyden korjaus liikkuvalla satelliitille
$\Delta C_{nm}$	Kiinteän vuoromaan aiheuttama gravitaatiomallin taulukon alkion muutos
$\Delta S_{nm}$	Kiinteän vuoromaan aiheuttama gravitaatiomallin taulukon alkion muutos
$\Delta \bar{C}_{nm}$	Kiinteän vuoromaan aiheuttama gravitaatiomallin taulukon alkion normalisoitu muutos
$\Delta N$	Lukumäärän muutos
$\Delta \bar{S}_{nm}$	Kiinteän vuoromaan aiheuttama gravitaatiomallin taulukon alkion normalisoitu muutos
$\Delta t$	Ajan muutos
$\epsilon$	Satelliitin pinnan heijastuskerroin
$\lambda$	Pituuspiiri eli longitudi
$\sigma_{\text{SISRE,Beidou}/\text{GEO\&IGSO}}$	Beidou järjestelmän geostationäärysten ja elliptisillä radoilla olevien satelliittien rataennusteen paikkavirheestä aiheutuva loppukäyttäjän paikannusvirheen keskihajonta
$\sigma_{\text{SISRE,Beidou}/\text{MEO}}$	Beidou järjestelmän matalammilla ympyräradoilla olevien satelliittien rataennusteen paikkavirheestä aiheutuva loppukäyttäjän paikannusvirheen keskihajonta
$\sigma_{\text{SISRE,GLONASS}}$	GLONASS järjestelmän satelliittien rataennusteen paikkavirheestä aiheutuva loppukäyttäjän paikannusvirheen keskihajonta
$\sigma_{\text{SISRE,GPS}}$	GPS järjestelmän satelliittien rataennusteen paikkavirheestä aiheutuva loppukäyttäjän paikannusvirheen keskihajonta



$\sigma_{\Delta R - c\Delta t}$	Satelliitin ennustetun paikan etäisyysvirheen keskihajonta maapal- lost, jossa on huomioitu kellovirheen vaikutus loppukäyttäjän paikka- arvioon
$\sigma_{\Delta T}$	Satelliitin ennustetun paikan virheen tangetiaalisuuntainen keskiha- jonta
$\sigma_{\Delta N}$	Satelliitin ennustetun paikan virheen tangentin normaalisuuntainen keskihajonta
$\nu$	Aallonpituus
$\tau$	Chebychevin funktion muuttuja
$\phi$	Leveyspiiri eli latitudi
$\chi$	Säteilypaineen varjokerroin
$\psi_{alb}(\gamma)$	Albedovoiman kulmariippuvuuden laskemiseen käytetty funktio
$\nabla$	Nabla, gradientin laskumerkki
$\mathbf{a}$	Kiihtyvyyden kolmipaikkainen vektori
$\mathbf{a}(t, \mathbf{r})$	Kiihtyvyyttä arvioiva voimamalli -funktio
$\mathbf{a}_{g,Aurinko}$	Auringon gravitaatiopotentiaalin tuottama kiihtyvyys
$\mathbf{a}_{g,Kuu}$	Kuun gravitaatiopotentiaalin tuottama kiihtyvyys
$\mathbf{a}_{g,Maa}$	Maapallon gravitaatiopotentiaalin tuottama kiihtyvyys
$A_{korjattu}$	Säteilypainemallin arvioitu aikariippuva pinta-ala
$\mathbf{a}_n$	Kiihtyvyysvektori ajanhetkellä $t_n$
$\mathbf{a}'_n$	Gauss-Jackson iteroinnissa määritettävä tarkempi kiihtyvyysarvio ajanhetkellä $t_n$
$\mathbf{a}_{punasiirtymä}$	Satelliitin liikkeestä johtuvan puna- ja sinisiirtymän aiheuttama muu- tos säteilypaineen tuottamaan kiihtyvyyteen
$A_{sat}$	Säteilypainemalliin arvioitu satelliitin pinta-ala
$\mathbf{a}_{srp}$	Auringon säteilypaineen tuottama kiihtyvyys
$\mathbf{a}_{srp,suora}$	Auringon säteilypaineen tuottaman kiihtyvyyden suora komponent- ti

$\mathbf{a}_{srp,y-bias}$	Auringon säteilypaineen tuottaman kiihtyvyyden normaalin suuntainen komponentti
$\mathbf{a}_{\text{valon tulosuunnan muutos}}$	Satelliitin liikkeestä sivuttain Auringon sijaintiin nähden joh- tuva vastakkaissuuntainen säteilypainekiihtyvyys.
$\mathbf{a}_{yht}$	Satelliittiin kohdistuva kokonaiskiihtyvyys, kaikkien kiihtyvyyksien summa
$a_i$	Chebychevin polynomin kerroin
$a_{ij}$	Runge-Kutta-Nyström menetelmän kerroin
$b_i$	Runge-Kutta-Nyström menetelmän kerroin
$\bar{b}_i$	Runge-Kutta-Nyström menetelmän kerroin
$c$	Valonnopeus tyhjiössä ( $299792458 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ )
$C_1$	Gauss-Jackson integrointiin liittyvä kerroin
$C_2$	Gauss-Jackson integrointiin liittyvä kerroin
$C_{nm}$	EGM mallin taulukon alkio
$\bar{C}_{nm}$	Normalisoitu EGM mallin taulukon alkio
$c_i$	Runge-Kutta-Nyström menetelmän kerroin
$\mathbf{e}_r$	Satelliitin sijainnin suuntavektori, eli normalisoitu sijaintivektori
$\mathbf{e}_v$	Satelliitin nopeuden suuntavektori, eli normalisoitu nopeusvektori
$f$	Taajuus
$\mathbf{F}$	Voimavektori
$G$	Gravitaatiovakio ( $6,67384 \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}$ )
$h$	Numeerisen integroinnin askeleen pituus ja myös Planckin vakio toi- saalla ( $6,62606957 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ )
$\mathbf{k}_i$	Runge-Kutta-Nyström menetelmän i. kerroinvektori
$k_{n,m}$	Loven luku, käytetään kiinteän maankuoren vuorovaihteluiden huo- mioimisessa
$m$	Kohteen massa

$M_{\oplus}$	Maapallon massa ( $5,97258 \cdot 10^{24}$ kg)
$m_{sat}$	Satelliitin massa
$\mathbf{p}$	Liikemäärän vektori
$P_{nm}(x)$	Legendren liittofunktio eli assosioitu Legendren polynomi
$\overline{P}_{nm}(x)$	Normalisoitu Legendren liittofunktio eli normalisoitu assosioitu Legendren polynomi
$p_P$	Auringon keskimääräinen säteilypainne yhden astronomisen yksikön päässä Auringosta ( $4,56 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$ )
$R_{\oplus}$	Maan säde (6378136,30 m)
$\mathbf{r}$	Objektin sijainnin kolmipaikkainen vektori
$\mathbf{r}_{sat}$	Satelliitin sijainnin kolmipaikkainen vektori
$\mathbf{r}_{sun}$	Auringon sijainnin kolmipaikkainen vektori
$\mathbf{r}(t)$	Satelliitin sijainnin kolmipaikkainen vektori, joka on ajan t funktio
$\dot{\mathbf{r}}(t)$	Satelliitin nopeuden kolmipaikkainen vektori, joka on ajan t funktio
$\ddot{\mathbf{r}}(t)$	Satelliitin kiihtyvyyden kolmipaikkainen vektori, joka on ajan t funktio
$\mathbf{r}_n$	Sijaintivektori ajanhetkellä $t_n$
$\mathbf{r}'_n$	Gauss-Jackson iteroinnissa määritettävä tarkempi paikka-arvio ajanhetkellä $t_n$
$r$	Sijaintivektorin itseisarvo eli etäisyys skalaarina
$s$	Runge-Kutta-Nyström -menetelmän laskennassa käytetty indeksi
$\mathbf{s}$	Häiriöpotentiaalin tuottajan sijaintivektori
$S_n$	Gauss-Jackson integrointiin liittyvä kerroin
$s_n$	Gauss-Jackson integrointiin liittyvä kerroin
$S_{nm}$	EGM mallin taulukon alkio
$\overline{S}_{nm}$	Normalisoitu EGM mallin taulukon alkio
$T_i(\tau)$	Chebychevin i:nneen asteen polynomi

$t$	Aikamuuttuja
$t_n$	Aikavektorin n:s alkio
$dt$	Ajan differentiaalisen pieni muutos
$\mathbf{v}$	Satelliitin nopeuden kolmipaikkainen vektori
$v$	Satelliitin nopeus skalaarina
$\mathbf{v}_n$	Nopeusvektori ajanhetkellä $t_n$
$\mathbf{v}_n'$	Gauss-Jackson iteroinnissa määritettävä tarkempi nopeusarvio ajanhetkellä $t_n$
$\mathbf{v}_{sat}$	Satelliitin nopeusvektori aurinkokeskeisessä koordinaatistossa

# 1. JOHDANTO

Paikannusteknologia on lisääntynyt valtavalla nopeudella elektronisissa laitteissa viimeisten vuosikymmenten aikana. Tämän on mahdollistanut tekniikan nopea kehitys. Ensimmäiset GPS vastaanottimet olivat kooltaan ja painoltaan ensimmäisiä matkapuhelimia vastaavia raskaita suuria laitteita. Tuon kokoluokan laitteet olivat monin tavoin epäkäytännöllisiä ja hankalia kuljettaa mukana. Toisaalta uusissa älypuhelimissa on puhelimen lisäksi samassa useampia satelliittipaikannuslaitteita ja kämmentietokone. Näiden laitteiden painokin on jo pudonnut varsin siedettäväksi. Mobiililaitteiden kehitystä havainnollistaa kuva 1.1.



Kuva 1.1: Oikealla Storno 940 vuodelta 1988, keskellä Nokia-Mobira Cityman 900 vuodelta 1987 ja vasemmalla Nokia N900 vuodelta 2009, noin 20 vuoden kehityksen jälkeen. [31]

Alkuun mobiililaitteiden kehityksessä oli tärkeintä hinta ja perustoiminnot. Viimeisten 10 vuoden aikana hinnat ovat kuitenkin pysyneet kuluttajaystävällisellä tasolla ja lähinnä käyttäjäkokemus on ohjannut kuluttajien mielipiteitä siitä millaiset tuotteet ovat parhaita. Käyttäjäkokemuksen parantaminen onkin siksi varmasti yksi tärkeimmistä tavoitteista, mitä mobiililaitteita tuottavalla yrityksellä voi olla.

Yleisimmät GNSS vastaanottimet lataavat internetistä navigointijärjestelmän almanakkadatan. Ilman internetiä vastaanotin joutuu hakemaan almanakkadatan satelliitin signaalista. Loppukäyttäjän paikan löytämiseen menisi tällöin useita minuutteja, sillä esimerkiksi GPS satelliitti lähettää koko almanakkadatapaketinsä kerran 12,5 minuutin aikana. Kun käyttäjä ei saa yhteyttä internetiin ja satelliittinavigointi pitäisi aloittaa nopeasti, täytyy löytää uusi ratkaisu. Ainoaksi vaihtoeh-

doksi jää almanakkadatan laskeminen itse. Tässä vaaditaan hyvin toimivaa satelliittiratojen ennustumallia. Jos ennustumalli ei toimi hyvin, paikannustarkkuus kärsii. Toisaalta hyvällä rataennustumallilla voidaan pystyä laskemaan ennusteita viikoksikin eteenpäin niin, että loppukäyttäjän paikannusarvio pysyy normaalille käyttäjälle riittävällä tarkkuudella.

Satelliittien rataennusteen virhettä voidaan yksinkertaisimmillaan arvioida vertaamalla ennustettua paikkaa ja tarkaksi tiedettyä paikkaa sekä lopuksi laskemalla näiden sijaintien välisen matkaeron. Yleensä satelliittien sijainnit ilmoitetaan maapalokeskeisessä koordinaatistossa ja paikkavertailut ovat vektorilaskentaa. Jos halutaan tietää tarkemmin millaisista elementeistä virhe koostuu, voidaan laskea erikseen virhe etäisyydessä maapallon keskipisteestä, virhe radan liikesuunnassa ja virhe radan poikkisuunnassa. Tätä kutsutaan RTN virheeksi. Lyhenteen kirjaimet tulevat englanninkielen sanoista *radial*, *transverse* ja *normal*.

Toisaalta tavalliselle GPS navigointilaitetta käyttävälle ihmiselle on tärkeää se, miten tarkasti hänen laitteensa kertoo paikkatiedot, ei se miten satelliitit liikkuvat taivaalla. Satelliitin paikan ja kellon ennustusvirheen vaikutusta pseudoetäisyysmittauksen virheeseen kuvataan SISRE eli *Signal-In-Space-Range-Error* -virheellä, jonka keskihajonta keskimäärin on

$$\sigma_{SISRE, GPS} = \sqrt{\sigma_{\Delta R - c\Delta t}^2 + \frac{1}{72}(\sigma_{\Delta T}^2 + \sigma_{\Delta N}^2)}. \quad (1.1)$$

Tämä virhe vaihtelee hieman ajan ja paikan suhteen, mutta keskimääräinen virhe on yleensä riittävän tarkka arvio. Muuttujat  $\sigma_{\Delta R - c\Delta t}^2$ ,  $\sigma_{\Delta T}^2$  ja  $\sigma_{\Delta N}^2$  edustavat RTN virheen komponentteja. Kannattaa huomata, että kaavan säteen suuntaisessa virheessä on huomioitu myös kellovirheen vaikutus, mutta tässä työssä emme tarkastele kellovirhettä. Oletamme siis, että termi  $\sigma_{\Delta R - c\Delta t}^2$  muodostuu kokonaan satelliitin rataennustuksen paikkavirheestä. SISRE-virhe oletetaan olevan riippumaton muista mittausvirheistä, joten mittausvirheen kokonaisvarianssi voidaan laskea yksittäisten varianssien summana. Lopullinen paikannusvirheen arvio saadaan kertomalla mittausvirheen keskihajonta GDOP eli *Geometric-Dilution-Of-Precision* -luvulla, joka ottaa huomioon satelliittigeometrian.

Tämän diplomityön tutkimusaiheena on satelliittien rataennusteiden tarkentaminen. Käytössä oleva rataennustumalli tuottaa GPS satelliiteille alle 7 päivän ennusteissa miltei aina alle 10 metrin SISRE -virheen. Rataennustumallia tarkennettaessa ongelmaksi tulee laskenta-ajan kasvaminen ennusteita tehtäessä, sillä voimatermien lisääminen rataennustumalliin lisää laskennallista kuormaa, mutta ei välttämättä paranna ennusteiden tarkkuutta merkittävästi. Olennaista tässä tutkimuksessa onkin selvittää mitkä pienet voimatermit ovat merkittävimpiä rataennusteita parannettaessa ja voidaanko mallin nykyistä toiminnallisuutta parantaa.

## 2. SATELLIITTIIEN RATAENNUSTUSMALLI

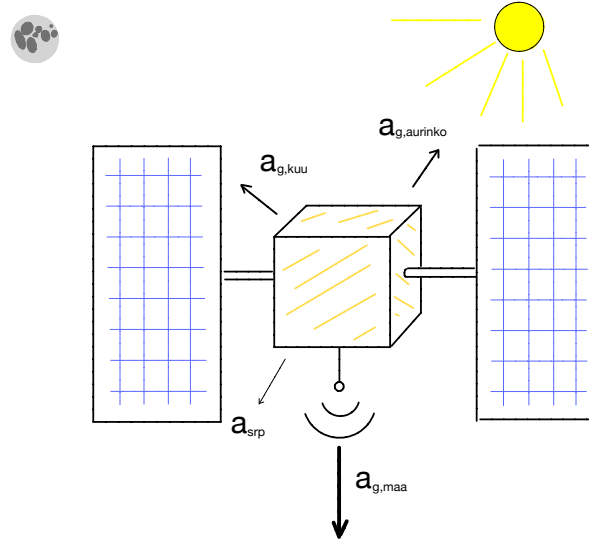
Satelliitin rataennustusmalli rakentuu integroinnin varaan, sillä kyseessä on eräänlainen alkuarvo-ongelma. Ennen integroinnin aloittamista pitää olla tiedossa satelliitin paikka, nopeus ja siihen kohdistuvan kiihtyvyyden funktio. Kannattaa huomioida, että nopeus voidaan myös arvioida, jos tiedetään kaksi tai useampaa paikkaa, joissa satelliitti on ollut tunnetuilla ajanhetkillä. Kun alkunopeus ja -sijainti ovat selvillä, paikkaa voidaan alkaa ennustaa kaavan

$$\mathbf{r}(\Delta t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^{\Delta t} \dot{\mathbf{r}}(t)dt = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)\Delta t + \int_0^{\Delta t} \int_0^t \ddot{\mathbf{r}}(\tau)d\tau dt \quad (2.1)$$

mukaisesti. Tässä  $\mathbf{r}(t)$  edustaa satelliitin sijaintia ajanhetkellä  $t$ ,  $\dot{\mathbf{r}}(t)$  satelliitin nopeutta ajanhetkellä  $t$  ja  $\ddot{\mathbf{r}}(\tau)$  satelliitin kiihtyvyyttä ajanhetkellä  $\tau$ . Paikkaennusteen laskemisen aikaväli  $\Delta t$  on integrointivälin pituus ja integrointi suoritetaan ajan suhteen. Jos integroinnin aikaväli on lyhyt, pysyy kiihtyvyys miltei vakiona koko integroinnin ajan. Toisaalta pidemmällä integroinnin aikaväleillä kiihtyvyyden aikariippuvuus alkaa vaikuttaa yhä selvemmin lopputulokseen. Ennusteen lopputulos on täsmälleen oikea, jos yllä oleva yhtälö voidaan ratkaista analyyttisesti ja jos kiihtyvyyden aikariippuvuus on täydellisesti tunnettu. Käytännössä kiihtyvyys ei riipu ajanhetkestä, vaan se riippuu satelliitin paikasta, joka puolestaan riippuu ajanhetkestä ja satelliitin liiketilasta. Koska kiihtyvyyden riippuvuus satelliitin paikasta on hyvin monimutkainen funktio, analyyttinen integrointi ei ole mielekästä. Integrointi toteutetaanakin käytännön ratkaisuissa numeerisesti, kuten kappaleessa 2.2 on esitetty.

### 2.1 Voimamalli

Kuten kaavasta (2.1) huomataan, satelliitin alkusijainti, alkunopeus ja satelliittiin kohdistuva kiihtyvyys määräävät millaista rataa satelliitti alkaa kulkea. Tämän vuoksi onkin selkeää miksi kiihtyvyyden mahdollisimman tarkka mallintaminen on suotavaa. Suurin kiihtyvyyden lähde satelliittirataennusteissa on selvästi maapallon gravitaatiokenttä ja sen tuottama gravitaatiovoima, mutta ei tule unohtaa muita pienempiäkään voimia, mitä satelliittiin kohdistuu. Kuvassa 2.1 on havainnollistettu merkittävimpiä satelliittiin vaikuttavia voimia. Mitä suuremman kiihtyvyyden kyseinen voima tuottaa, sitä paksummalla viivalla sen vektori on piirretty.



Kuva 2.1: Satelliittiin vaikuttaa useampi voimavuorovaikutus, joiden tuottamat kiihtyvyydet voidaan kätevästi laskea yhteen.

Kokonaiskiihtyvyyden laskemiseksi kaikki kiihtyvyydet voidaan lisätä suoraan toisiinsa normaalia vektorilaskentaa hyödyntäen, kuten kaavassa

$$\mathbf{a}_{yht} = \mathbf{a}_{g,Maa} + \mathbf{a}_{g,Aurinko} + \mathbf{a}_{g,Kuu} + \mathbf{a}_{srp} + \mathbf{a}_{muut} \quad (2.2)$$

on esitetty. Termit  $\mathbf{a}_{g,Maa}$ ,  $\mathbf{a}_{g,Aurinko}$  ja  $\mathbf{a}_{g,Kuu}$  edustavat maapallon, Auringon ja Kuun muodostamia gravitaatiokiihtyvyyksiä käytetyssä koordinaatistossa. Termi  $\mathbf{a}_{srp}$  on puolestaan Auringon säteilypaineen aiheuttama kiihtyvyys. Edelliset termit ovat neljä suurinta kiihtyvyystermiä, jotka tulee huomioida satelliittirataennustuksia tehtäessä. Mikäli suhteellisuusteoriaa ei oteta huomioon, nämä satelliittiin vaikuttavat neljä suurinta voimaa riippuvat vain satelliitin sijainnista aurinkokunnassa. Jos satelliitti ei liiku suhteellisuusteoreettisella nopeudella, eikä siihen vaikuta ilmanvastus, satelliitin liiketila ei juuri vaikuta siihen kohdistuvaan kiihtyvyyteen. Matematiikan termein voidaan sanoa, että alkuarvo-ongelmaan liittyy pelkkä toisen kertaluvun differentiaaliyhtälö.

Tämän tutkimuksen kannalta mielenkiintoiseksi jää kiihtyvyys  $\mathbf{a}_{muut}$ , joka muodostuu aiemmin huomioimattomista voimatermeistä. Lisäksi tässä työssä käsitellään lyhyesti suhteellisuusteoreettisia korjauksia edellä mainittuihin suurimpiin voimiin.

Seuraavassa taulukossa 2.1 on arvioitu erilaisten GPS satelliittiin vaikuttavien voimien suuruusluokkia ilmoittamalla niiden aiheuttamia maksimikiihtyvyyksiä maapalokeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa. On huomionarvoista, että jotkin voimat vaihtelevat ajan suhteen. Sellaisista voimista on tässä taulukoituna vain maksimiarvot. Lisäksi toisien voimien vaikutussuunta saattaa olla aikariippuva.



Taulukko 2.1: GPS satelliittiin kohdistuvien kiihtyvyyksien suuruusluokat maapallokeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa. Taulukoituna on vain kiihtyvyyksien arvioidut maksimit.

	Voima	Kiihtyvyys ( $\frac{m}{s^2}$ )
	Maapallon gravitaatio	$6,0 \cdot 10^{-1}$
	Kuun gravitaatio	$4,3 \cdot 10^{-5}$
	Auringon gravitaatio	$2,1 \cdot 10^{-6}$
	Auringon säteilypaine	$1,0 \cdot 10^{-7}$
	Solid tide	$5,0 \cdot 10^{-9}$
	Maapallon albedo	$4,5 \cdot 10^{-9}$
	Vuorovedet	$8,0 \cdot 10^{-10}$
	Suhteellisuusteoriakorjaus Maan gravitaatiolle	$3,0 \cdot 10^{-10}$
	Venuksen gravitaatio	$2,7 \cdot 10^{-10}$
	Suhteellisuusteoriakorjaus Auringon gravitaatiolle	$3,7 \cdot 10^{-11}$
	Jupiterin gravitaatio	$3,0 \cdot 10^{-11}$
	Antennin 5W suunnattu säteilyteho	$1,5 \cdot 10^{-11}$
	Satelliitin liikkeen vaikutus säteilypaineeseen	$1,0 \cdot 10^{-11}$

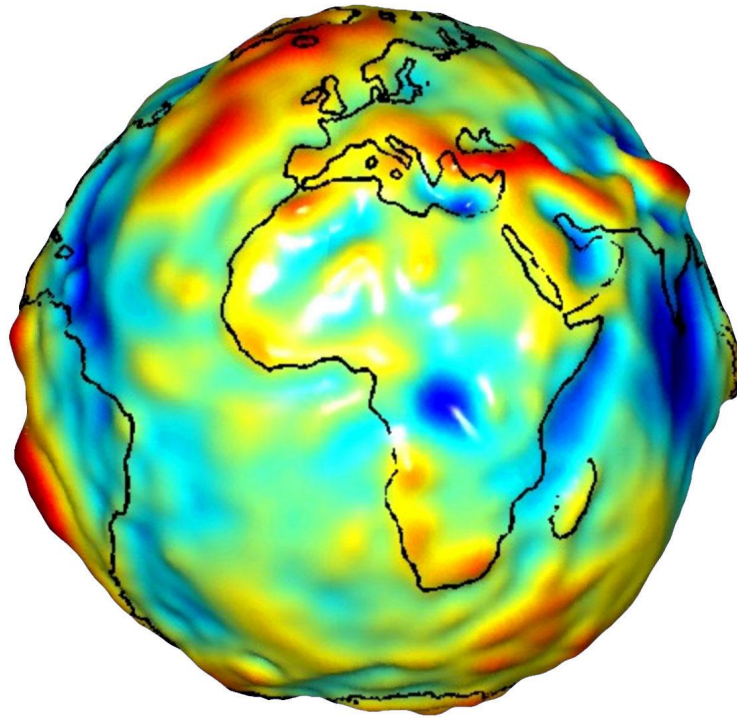
Yllä oleva taulukko on vain suuntaa antava, sillä useimmat voimat eivät pysy vakioina, vaan vaihtelevat laajalla voimakkuusalueella. Esimerkiksi Jupiterin gravitaatiovuorovaikutus on tyypillisesti suurempi, kuin Venuksen, mutta silloin kun Venus on radallaan lähimpänä maapalloa, sen vaikutus on lähes kertaluokkaa suurempi, kuin Jupiterin. Voimat on arvioitu Maan albedoa ja vuorovesiä lukuunottamatta nykyistä voimamallia käyttäen GPS II-A lohkon satelliitille. Albedolla kuvataan taivaankappaleen aurinkopuolen heijastamaa säteilypainetta. Albedon ja vuoroveden aiheuttamat maksimikiihtyvyydet on arvioitu Montenbruckin kirjan perusteella. Antennin 5 W suunnatusta säteilytehosta muodostuva työntövoima on arvioitu 1000kg massaiselle satelliitille.

Taulukosta voidaan kuitenkin havaita, että säteilypaineeseen liittyvät voimat, kiinteän vuoromaan (solid tide) vaikutukset sekä albedo ovat melko tärkeitä satelliittien rataennusteiden tarkkuuden kannalta. Lisäksi taulukosta selviää että pienikin virhe suuremmissa gravitaatiovoimissa on suuruusluokaltaan pieniä voimia merkittävämpi.

### 2.1.1 Maan gravitaatio

Peruskoulussa opetetaan, että maapallo tuottaa putoamiskiihtyvyyden, joka suuntautuu maapallon keskipisteeseen. Todellisuus on kuitenkin se, että jokainen yksittäinen massallinen hiukkanen tuottaa pienen gravitaatiokentän ja kaikkien näiden gravitaatiokenttien summa vastaa kokonaisgravitaatiota. Siispä kaikki maapallon epätasaisuudet tiheydessä ja pinnanmuodoissa vaikuttavat. Nämä pienet gravitaatiokentän vaihtelut leveys ja pituuspiirien funktiona eivät välttämättä tunnu suuril-

ta, mutta tarkkoja satelliittien rataennusteita tehdessä ne ovat hyvin merkittäviä.



Kuva 2.2: JPL:n havainnollistava kuva maapallon gravitaatiokentän epätasaisuuksista maanpinnan tasolla. Mitä punaisempi väri ja suurempi kohouma, sitä voimakkaampi maapallon gravitaatiokiihtyvyys on alueella verrattuna referenssiellipsoidin aiheuttamaan kiihtyvyyteen [28]. Kuvan piirtoon vaadittu data on saatu Nasan GRACE -tehtävältä (engl. *Gravity Recovery and Climate Experiment*).

Kuten kuvasta 2.2 voidaan nähdä, maapallon painovoimakenttä vaihtelee huomattavasti maanpinnan tasolla. Mitä korkeammalle maanpinnan yläpuolelle nousee, sitä pienempi vaikutus kuitenkin gravitaatiokentän epähomogeenisuuksilla on. Koska tyypilliset navigointisatelliitit kiertävät maapalloa noin 20 000 kilometrin korkeudella, riittää että gravitaatiomallimme ottaa huomioon vain suurimmat epätasaisuudet gravitaatiokentässä.

Rataennustusmallin gravitaatiokiihtyvyyden laskemisessa on käytetty maapallon osalta ”typistettyä” EGM2008 mallia [39]. EGM eli Earth Gravitational Model tau-lukoissa on esitetty maapallon gravitaatiopotentiaaliin liittyviä vakioita. Näiden vakioiden avulla voidaan laskea näppärästi Maan massan tuottama putoamiskiihtyvyys satelliitin sijainnissa. Esimerkiksi Montebruckin ja Gillin kirjasta [27] voidaan löytää selkeä laskentakaavan johto. Kiihtyvyyden määrittäminen perustuu potentiaal gradientin laskemiseen. Potentiaali voidaan puolestaan määrittää palloharmoonien kertoimien avulla. Kokonaiskiihtyvyys voidaan määrittää lausekkeella

$$\mathbf{a} = \nabla \frac{GM_{\oplus}}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{R_{\oplus}^n}{r^n} \bar{P}_{nm}(\sin \phi) (\bar{C}_{nm} \cos(m\lambda) + \bar{S}_{nm} \sin(m\lambda)). \quad (2.3)$$

Tässä vakio  $G$  edustaa gravitaativakiota,  $M_{\oplus}$  Maan massaa ja  $R_{\oplus}$  Maan sädettä. Parametri  $r$  edustaa etäisyyttä käytetyn koordinaatiston keskipisteestä tai “maapallon painopisteestä”. Vakiot  $\bar{C}_{nm}$  ja  $\bar{S}_{nm}$  ovat puolestaan EGM2008 mallin taulukoituja normalisoituja vakioita ja  $n$  sekä  $m$  näiden taulukoiden indeksejä. Funktio  $\bar{P}_{nm}(\alpha)$  on normalisoitu Legendren liittofunktio. Kulmat  $\phi$  ja  $\lambda$  edustavat leveys- ja pituuspiirien kulmia. Gradientti otetaan luonnollisesti niiden suuntien suhteen, joissa kiihtyvyys pitää määrittää. Koska potentiaali on esitetty etäisyyden  $r$  sekä kulmien  $\phi$  ja  $\lambda$  avulla, on kätevintä ottaa gradientti näiden suhteen ja jälkikäteen muuntaa kiihtyvyyden komponentit haluamamme karteesisen maapalloseskeettisen inertiaalikoordinaatiston (TIRS)  $x$ ,  $y$  ja  $z$  suuntien mukaisiksi (kts. Kappale 2.3 Koordinaatistomuunnokset).

Asteen  $n$  ja kertaluvun  $m$  Legendren liittopolynomi voidaan laskea analyttisesti kaavalla

$$P_{nm}(u) = (1 - u^2)^{\frac{m}{2}} \frac{d^m}{du^m} P_n(u). \quad (2.4)$$

Legendren liittopolynomille löytyy myös valmiita ratkaisuja eri kertaluvuille ja asteille, joten joka kerta derivoineja ei tarvitse laskea erikseen. Kyseisessä kaavassa  $P_n(u)$  edustaa tavallista ratkaisua Legendren  $n$ :nnen asteen differentiaaliyhtälöön. Jotta funktio toimisi kaavassa (2.3), se pitää vielä normalisoida kaavan

$$\bar{P}_{nm}(u) = \sqrt{\frac{(2 - \delta_{0m})(2m + 1)(n - m)!}{(m + n)!}} P_{nm}(u) \quad (2.5)$$

mukaisesti. Edellisessä kaavassa (2.5) termi  $\delta_{0m}$  edustaa Kroneckerin deltafunktiota, joka saa arvon 1 indeksin  $m$  ollessa 0 ja muulloin deltafunktio on 0. Itse normalisoinnin ideana on saada maapallon gravitaatiomallin taulukon arvot pysymään tietyssä numeerisessa suuruusluokassa.

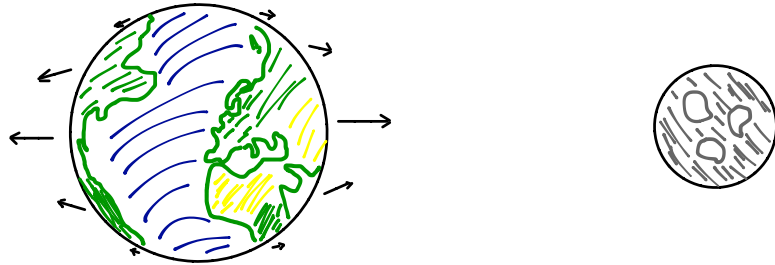
Palataan nyt kaavaan (2.3). Siinä kiihtyvyyden ratkaisemiseen tarvitsee laskea potentiaalin gradientti. Satelliittien rataennustuksia laskiessa kannattaa tehdä analyttiset lausekkeet kiihtyvyyksien komponenteille sen sijaan, että potentiaalia derivoitaisiin laskuhetkellä numeerisesti. Tällöin laskennallinen taakka kevenee ja rataennusteiden tuottaminen käy nopeammin. Selkeä matemaattinen esitys yllä esitettyjen kaavojen derivoimisesta löytyy Montenbruckin kirjasta. [27]

### 2.1.2 Kuun ja Auringon gravitaatio

Kuu ja Aurinko tuottavat maanpinnalla vuorovetenä tunnetun ilmiön. Häiritsevät gravitaatiopotentiaalit ovat maapallokeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa sitä selvemmin havaittavissa, mitä kauempana ollaan maapallosta (kunhan pysytään etäisyyksillä, joilla on järkevää käyttää maapallokeskeistä koordinaatistoa). Gravitaation häiriöpotentiaaleja voisi valaista ajattelemalla, että maapallo “putoaa” kohti häiritsevää potentiaalia. Tällöin maapallon “putoaminen” kumoaa häiriöpotentiaalin maapallon keskipisteessä. Maapallon keskipisteen ulkopuolella häiriöpotentiaali ei kuitenkaan ole sama kuin maapallon keskipisteessä, joten nähdään häiriön tuottama kiihtyvyys. Häiritsevän gravitaatiopotentiaalin aiheuttama kiihtyvyys maapallon koordinaatistossa voidaan laskea kaavalla

$$\mathbf{a}_{g,Aurinko/Kuu} = GM \cdot \left( \frac{\mathbf{s} - \mathbf{r}}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|^3} - \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|^3} \right), \quad (2.6)$$

jossa sijaintivektori  $\mathbf{s}$  on gravitaatiopotentiaalin tuottajasta maapallon gravitaatiokeskipisteeseen,  $\mathbf{r}$  edustaa vektoria satelliitista maapallon keskipisteeseen,  $G$  gravitaatiovakiota ja  $M$  häiritsevän kappaleen massaa. Kiihtyvyyden vaikutussuuntaa on havainnollistettu kuvassa 2.3.



Kuva 2.3: Kuun aiheuttama gravitaatiopotentiaali maapallokeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa. Nähdään selvästi miksi esimerkiksi vuorovesi-ilmiö on olemassa.

Jotta gravitaatiovuorovaikutukset voidaan laskea, pitää tietysti olla tiedossa kohteiden sijainnit. Ennustusmallissa on käytetty Auringon ja Kuun sijaintien määrittämiseen analyttistä kaavaa [27]. Suhteellisuusteorian mukaan gravitaatio kulkee tyhjiössä valonnopeudella, joten periaatteessa gravitaatiopotentiaalien lähtöpisteiden laskemisessa pitäisi ottaa huomioon myös kappaleiden liike. Tasaisella nopeu-

della liikkuvien kohteiden gravitaatiokenttä on jo “ehtinyt tasaantua”, mutta kiihtyvässä liikkeessä olevat kappaleet tuottavat ainakin teoriassa gravitaatioaaltoja [4, 6]. Rataennustusmalli käyttää kuitenkin senhetkisiä paikkoja. Approksimaatio on hyvä, sillä taivaankappaleiden nopeudet ovat pieniä ja etäisyydet valtavia. Tästä seuraa, että voimavektorit muuttuvat hyvin hitaasti ICRS koordinaatistossa. Lyhenne ICRS tulee sanoista *International Celestial Reference System* ja koordinaatistolla tarkoitetaan inertiaalikoordinaatistoa, joka ei pyöri tai ole kiihtyvässä liikkeessä (kts. Kappale 2.3 Koordinaatistomuunnokset).

### 2.1.3 Auringon säteilypaine

Auringosta säteilevä valo, lämpö ja muu sähkömagneettinen energia läpäisevät ongelmitta maapallon magneettikentän ja siten Auringon säteilypaine vaikuttaa huomattavasti satelliittien ratoihin. Jokainen satelliittiin osuva foton sisältää energiansa riippuvan liikemäärän  $p$ , joka voidaan laskea kaavan (2.7) osoittamalla tavalla. Fotonin liikemäärän lausekkeessa

$$p = \frac{h}{\nu} = \frac{hf}{c} \quad (2.7)$$

vakio  $h$  edustaa Planckin vakiota ja parametri  $\nu$  aallonpituutta. Vakio  $c$  on valonnopeus ja parametri  $f$  on taajuus. Toisaalta fotonin törmätessä satelliittiin, se voi joko absorboitua tai heijastua. Absorboituessaan foton antaa satelliitille koko liikemääränsä. Heijastuminen on monimutkaisempi tapahtumaketju. Tällöin foton ensin antaa liikemääränsä satelliitille ja tämän jälkeen satelliitti vielä joutuu antamaan heijastuneelle fotonille uuden liikemäärän (liikemäärän säilymislain mukaisesti). Mikäli foton heijastuu takaisin tulosuuntaansa, se antaa satelliitille miltei kaksinkertaisen määrän liikemäärää verrattuna absorboitumiseen. Jos oletetaan, että satelliitti olisi paikallaan eikä lähtisi liikkeelle heijastumisen seurauksena, kyseessä olisi juuri kaksinkertainen liikemäärä alkuperäisen fotonin liikemäärään nähden.

Heijastumissuunta puolestaan riippuu fotonin aaltofunktion vaiheesta, rajapinnan ominaisuuksista ja törmäyssuunnasta. Käytännössä heijastumissuuntaa ei voida täsmällisesti määrittää yksittäiselle fotonille, kuten Heisenbergin epätarkkuusperiaate sanookin. Suurina määrinä fotonit kuitenkin käyttäytyvät kvanttimekaniikan ehtojen mukaisesti ja heijastuvat tai siroavat ennustettavissa oleviin kulmiin.

Käytössä oleva säteilypainemalli olettaa, että satelliitin pinta koostuu aurinkopaneeleista, jotka puolestaan on suunnattu kohti Aurinkoa ja palasta satelliitin runkoa, josta voi heijastua säteilyä myös sivulle. Myös aurinkopaneelit saattavat heijastaa sivulle auringonvaloa, jos niiden suuntaus Aurinkoon ei ole täydellinen. Lisäksi säteilypaineen voimakkuus riippuu satelliitin etäisyydestä Auringosta. Ennustusmallissa on myös huomioitu, että kun satelliitti kulkee maapallon varjoon, auringonvalo ei

pääse osumaan satelliittiin. Kaikilla satelliiteilla ei ole samanlaista profilimuotoa ja millään kahdella satelliitilla ei ole täsmälleen samaa rataa, joten kaikille satelliiteille pitää etsiä omat kalibrointiparametrit säteilypainemallin toimimiseksi.

Säteilypainemalli on kaksiparametrinen. Ensimmäinen parametri määrää voiman, jonka Aurinko kohdistaa suoraan satelliittiin. Toinen parametri kertoo miten voimakkaasti satelliitti pyrkii ajautumaan säteilypaineen voimasta sivusuuntaan. Säteilypaineen tuottama kiihtyvyys on siis kokonaisuudessaan muotoa

$$\mathbf{a}_{srp} = \mathbf{a}_{srp,suora} + \mathbf{a}_{srp,y-bias}, \quad (2.8)$$

jossa nuo kaksi erillistä säteilypainekomponenttia  $\mathbf{a}_{srp,suora}$  ja  $\mathbf{a}_{srp,y-bias}$  ovat ortogonaalisia toisiinsa nähden [2]. Y-bias -termi muodostuu mahdollisesta satelliittien epäsäännöllisistä muodoista ja hieman vinossa olevista aurinkopaneeleista, jotka heijastavat auringonvaloa eri tavalla kuin esimerkiksi tasainen pallo heijastaisi. Lisäksi jos aurinkopaneelien kohdistuksessa on pientä epätarkkuutta, tämä termi pyrkii huomioimaan tuonkin osittain.

Kaavassa (2.9) on esitetty Auringosta suoraan tulevan säteilyn tuottaman kiihtyvyyden laskukaava. Suoran säteilypainekiihtyvyyden kaavassa

$$\mathbf{a}_{srp,suora} = \chi \alpha_1 p_P \cdot (1 + \epsilon) \frac{A_{sat}}{m_{sat}} \frac{(AU)^2}{\|\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat}}{\|\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat}\|} \quad (2.9)$$

$\chi$  edustaa sitä miten suuri osa Auringon säteilemästä valosta häviää, kun ollaan muiden taivaankappaleiden varjossa. Tyypillisesti riittää, kun lasketaan  $\chi$  maapallon tuottaman varjon funktiona.  $\alpha_1$  puolestaan edustaa vakiota, joka pitää etsiä erikseen jokaiselle satelliitille. Fysikaalisesti se riippuu satelliitin muodoista ja rata-  
tasosta. Aikariippuvuudet on unohdettu ja  $\alpha_1$  oletetaan vakioksi kaikilla ajan hetkillä. Parametri  $\alpha_1$  voidaan estimoida esimerkiksi Kalmanin suotimen avulla [2]. Parametri  $p_P$  ilmoittaa keskimääräisen Auringon säteilypaineen voimakkuuden yhden astronomisen yksikön ( $AU$ ) päässä Auringosta. Astronominen yksikkö on pituusyksikkö, joka vastaa maapallon keskimääräistä etäisyyttä Auringosta. Vakio  $\epsilon$  edustaa satelliitin pinnan heijastuskerrointa. Jos satelliitti olisi täysin musta, eikä heijastaisi mitään, tuo vakio olisi 0. Käytännössä satelliitin pinta koostuu kuitenkin suurelta osalta aurinkopaneeleista ja niiden heijastuskerroin on suuruusluokaltaan noin 0,2.  $A_{sat}$  ja  $m_{sat}$  edustavat satelliitin pinta-alaa ja massoja. Vektorit  $\mathbf{r}_{sat}$  ja  $\mathbf{r}_{sun}$  puolestaan vastaavat vektoreita maapalloseskesisen inertiaalikoordinaatiston origosta satelliittiin ja Aurinkoon.

Säteilypainemalli olettaa Auringon olevan pistemäinen kohde, jolloin säteilyvuo on kääntäen riippuvainen Auringon etäisyyden neliöstä. Jos pitäisi huomioida, että Aurinko näyttää lähempää katsottuna suuremmalta, kuin kauempaa, olisi säteily-

vuon lauseke monimutkaisempi, mutta nykyinen approksimaatio on riittävän hyvä, sillä maapallo kiertää Aurinkoa riittävän ympyrämaisella radalla ja siten etäisyys Aurinkoon vaihtelee vain vähän. Säteilypainemallimme ei myöskään ota huomioon Auringon liikettä. Sähkömagneettinen säteily kulkee tyhjiössä nopeudella  $c$  ja siten periaatteessa Aurinko näyttää olevan paikassa, jossa se oli oikeasti noin 8 minuuttia sitten. Käytännössä Aurinko on kuitenkin kaukana ja liikkuu hitaasti, joten approksimaatio säteilyn lähtösijainnista on hyvin perusteltu. Mallimme huomioi kuitenkin satelliitin rakenteiden heijastaman säteilypaineen tuottaman sivusuuntaisen voiman. Tämä lasketaan kaavalla

$$\mathbf{a}_{srp,y-bias} = \alpha_2 \cdot 10^{-9} \cdot \frac{\mathbf{r}_{sat} \times (\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat})}{\|\mathbf{r}_{sat} \times (\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat})\|}, \quad (2.10)$$

jossa parametri  $\alpha_2$  estimoidaan jälleen Kalmanin suotimella siten, että rataennusteiden virhe minimoituu [2]. Kaavan vektorit ovat samoja, mitä käytimme `asrp,suora:n` laskemiseen.

## 2.2 Koordinaatistomuunnokset

Astronomiassa käytetään nykyään useampia erilaisia koordinaatistoja, joten suunta-vektoreita ja koordinaatteja pitää voida muuntaa näiden välillä. Erilaisien ongelmien tarkastelussa käytetään erilaisia koordinaatistoja. Esimerkiksi satelliittirataennusteiden tekeminen maapalloon sidotussa pyörivässä koordinaatistossa olisi huomattavan hankalaa, mutta maapallon gravitaatiokentän mallintaminen käy kätevimmin juuri edellisessä koordinaatistossa. Entistä kattavampi taivaan kohteiden liikkeen mittaussaineisto on mahdollistanut yhä tarkempien pysyvien referenssijärjestelmien määrittelyn. Näistä referenssijärjestelmistä puolestaan muodostetaan referenssikoordinaatistot, joita tarvitsemme tässäkin tutkimuksessa.

Periaatteessa kaikki koordinaatistomuunnokset voidaan suorittaa yksinkertaisten rotaatiomatriisien avulla. Tällöin koordinaattiakseleita vain kierretään yksi kerrallaan, kunnes uusi koordinaatisto on saavutettu. Jos olemme aivan täsmällisiä, niin liikkeestä ja kiihtyvästä liikkeestä muodostuu pientä virhettä suhteellisuusteorian kautta, mutta käyttötarkoitukseemme perinteiset ja tutut koordinaatistomuunnosmatriisit käyvät hyvin.

Tutkimuksen aikana käytetyt eri koordinaatistot ovat ECEF eli ITRS, TIRS, ja ICRS [21]. ECEF eli *Earth-Centered, Earth-Fixed* koordinaatisto on maapalloseskeinen ja maapallon asentoon lukittu koordinaatisto. ITRS eli *International Terrestrial Reference System* on täsmälleen sama koordinaatisto. TIRS eli *Terrestrial Intermediate Reference System* on maapalloseskeinen inertiaalikoordinaatisto, jonka akselit eivät pyöri Maan mukana, mutta sen origo on lukittu maapallon gravitaatiokeskipisteeseen. Tämän koordinaatiston akselien suuntaus pysyy vakiona rataennustusta

tehtäessä, mutta suuntausta ei varsinaisesti ole lukittu ICRS koordinaatistoon nähden. ICRS koordinaatisto on määritelty ”kiinteiden”, kaukaisten taivaankappaleiden perusteella. ICRS eli *International Celestial Reference System* koordinaatiston origo on aurinkokunnan gravitaatiokeskipisteessä, lähellä Aurinkoa. ICRS koordinaatistojen akselit on lukittu osoittamaan pysyvästi sopivasti valittuihin suuntiin. Tässä työssä käytetyssä rataennustusmallissa on käytetty ICRS koordinaatistona vanhemmaa J2000-järjestelmää, jonka x-akseli osoittaa maapallon kevätpäiväntasauspisteen (eli ekvaattorin ja ekliptikan leikkauspisteistä toinen) suuntaan ajanhetkellä 1. tammikuuta 2000 klo 12. Suunta z-akselille määräytyy maapallon navan suunnasta samalla ajanhetkellä. [35]

Teoriatasolla koordinaatistojen välillä liikkuminen on siis yksinkertaista. Käytännössä kuitenkin maapalloseskeisen pyörivän koordinaatiston (ITRS) ja tähtitieteellisen ICRS -koordinaatiston välisessä koordinaatistomuunnoksessa on huomioitava monta yksityiskohtaa. Esimerkkeinä mainittakoon, ettei maapallon pyörimisnopeus ole vakio eikä maapallon pyörimisakselikaan pysy samansuuntaisena. Kyseinen koordinaattimuunnos voidaan laskea kaavalla

$$\mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t) = \mathbf{W}(t)\mathbf{G}(t)\mathbf{N}(t)\mathbf{P}(t)\mathbf{r}_{\text{ICRS}}, \quad (2.11)$$

jossa  $\mathbf{W}(t)$  edustaa napavariaation,  $\mathbf{G}(t)$  Maan pyörimisliikkeen,  $\mathbf{N}(t)$  nutaation ja  $\mathbf{P}(t)$  precession aikariippuvia koordinaattimuunnosmatriiseja. Nämä  $3 \times 3$  muunnosmatriisit on määritelty täsmällisesti Seppäsen diplomityössä [35]. Vektorit  $\mathbf{r}_{\text{ICRS}}$  ja  $\mathbf{r}_{\text{ITRS}}(t)$  edustavat sijaintivektoreita ICRS ja ITRS koordinaatistoissa. Kannattaa huomioida, että koska ITRS on sidottu maapallon asentoon, tuo koordinaatisto on myös aikariippuva ICRS koordinaatistoon nähden.

Itse rataennusteiden laskemiseen käytetty TIRS koordinaatisto saadaan ICRS koordinaatistosta ottamalla huomioon maapallon asento ennustuksen aloittamisen ajanhetkellä. Yhtälö

$$\mathbf{r}_{\text{TIRS}}(t_0) = \mathbf{G}(t_0)\mathbf{N}(t_0)\mathbf{P}(t_0)\mathbf{r}_{\text{ICRS}} \quad (2.12)$$

havainnollistaa sitä, miten sijaintivektori voidaan muuntaa ICRS koordinaatistosta TIRS -koordinaatistoon. Aikamuuttuja  $t_0$  edustaa ennustuksen aloitusajankohtaa. TIRS koordinaatisto on hyvä approksimaatio inertiaalikoordinaatistosta. Jos katsoimme tarkemmin kaavaa (2.12), huomaamme myös, että ICRS-TIRS -koordinaatistomuunnos on periaatteessa vain yksi välivaihe ICRS-ITRS muunnoksesta. [35]

Tarkemman dokumentaation koordinaatistomuunnosten käytöstä voi lukea muun muassa Seppäsen diplomityöstä. Lisäksi professori Poutasen Aalto-yliopiston luentokalvoista voi saada nopeasti kattavan kokonaiskuvan koordinaatistojen ja aikastandardien vertautuvuuksista toisiinsa. [30, 35]



## 2.3 Numeerinen integrointi

Aiempi kaava (2.1) esittää tavan laskea satelliitin rata analyttisesti. Reaalimaailmassa satelliittiin vaikuttaa kuitenkin niin monimutkaisesti mallinnettava kokonaiskiihtyvyys, ettei analyttinen integrointi onnistu. Ongelman tekee helpommaksi numeerisiin menetelmiin siirtyminen. Esimerkiksi yksinkertaisella Eulerin numeerisella integroinnilla [43] lasku muuttuu lyhyiden aika-askelten summaamiseksi, joiden aikana kiihtyvyyden oletetaan olevan vakio. Jos rataennuste pitää laskea pidemmälle aikavälille, joudutaan laskemaan näitä numeerisen integroinnin pätkiä hyvin suuri määrä.

Eulerin menetelmän lausekkeen

$$\mathbf{r}(\Delta t) = \mathbf{r}(0) + \dot{\mathbf{r}}(0)\Delta t + \frac{1}{2}\ddot{\mathbf{r}}(0)\Delta t^2 \quad (2.13)$$

käytössä kannattaa huomioida, että nyt  $\Delta t$  tulee olla riittävän lyhyt, ettei numeerinen virhe kasva liian suureksi. Jokaisen aika-askeleen jälkeen päivitetään satelliitin paikka, nopeus ja kiihtyvyys uuden sijainnin mukaiseksi. Mitä useampaan osaan integroinnin aikaväli jaetaan, sitä tarkempi approksimaatio saadaan analyttiseen ratkaisuun verrattuna. Käytännössä numeerisilla menetelmillä ei kuitenkaan päästä täydelliseen tarkkuuteen, sillä kohtuuton aika-askeleen pienentäminen pidentää laskenta-aikaa liikaa. Lisäksi numeerisen laskennan pyöristysvirheet voivat alkaa häiritä liian pienillä integroinnin aikaväleillä. Voidaan kuitenkin löytää sopivan pituinen aikaväli, jolloin satelliittiin kohdistuva kiihtyvyys on lähes vakio tai muuttuu miltei lineaarisesti ajan funktiona. Tuon pituisen aika-askeleen käyttäminen tuo riittävän hyvän lopputuloksen, kunhan käytetty numeerinen laskentamenetelmä on tarpeeksi hyvä.

Analyttinen integrointi on määritelty Riemannin summan [43] avulla, jossa jakovälien määrä lähestyy ääretöntä. Eulerin menetelmä on siis integroinnin approksimaatio, jossa jakoväli ei ole äärettömän lyhyt. Eulerin menetelmässä myös funktion evaluointipisteet on määritelty jokaisen jakovälin alkuun.

### 2.3.1 Runge-Kutta-Nyström integrointi

Koska aika-askeleen lyhentäminen tekee numeerisesta integroinnista hitaan laskea, pitää keksiä uusia keinoja laskennan nopeuttamiseksi. Jos tiedetään kappaleen liikeyhtälöstä tarpeeksi, voidaan käyttää pidempää aika-askelta ja arvioida virhe liikeyhtälön perusteella. Sopiva numeerinen integraattori voisi olla vaikkapa Runge-Kutta-Nyströmin menetelmä, joka laskee kiihtyvyyden lausekkeeseen perustuen summan termejä, jotka approksimoivat ratkaisua, jossa integroinnin aika-askel lähenee äärettömän lyhyttä [35]. Kyseinen integrointimenetelmä toimii erittäin hyvin toisen asteen differentiaaliyhtälöiden ratkaisemiseen, jonka lausekkeessa ei ole ensimmäisen

kertaluvun derivaattoja. Kyseistä Runge-Kutta-Nyströmin menetelmää kutsutaan useasti myös RKN menetelmäksi.

Käytännössä Runge-Kutta-Nyström approksimaatio voidaan nähdä Taylorin sarjakehitelmänä jokaiselle integrointipisteelle. Menetelmässä otetaan matemaattisesti huomioon nopeuden ja kiihtyvyyden muutos jokaisella integroinnin aika-askeleella. Mikäli kiihtyvyys muuttuu kovin epälineaarisesti integroinnin aika-askeleilla, tämä RKN-menetelmä ei enää toimisi hyvin. Hyvin pieni epälineaarisuus ei tietenkään haittaa merkittävästi. Siis aika-askelta lyhentämällä päästään eroon numeerisesta virheestä RKN -menetelmälläkin. RKN approksimaation kertalukuakin voidaan nostaa, jolloin epälineaarisuus voidaan ottaa huomioon ainakin osittain (toimivuus riippuu epälineaarisuuden luonteesta). RKN -menetelmän vahvuutena mainittakoon, että sillä ei tarvitse lyhentää aika-askelta niin paljoa, kuin alkeellisemmalla Eulerin menetelmällä. Pääsyy menetelmän valitsemiseen tämän työn numeeriseksi integraattoriksi on kuitenkin sen luotettava kyky ratkaista juuri toisen kertaluvun differentiaaliyhtälöjä, joissa ei esiinny ensimmäisen kertaluvun derivaattoja [12].

Käytännössä RKN menetelmät on jaettu niiden kertaluvun mukaan, kuten tavallisetkin Runge-Kutta -menetelmät. Tässä kertaluku tarkoittaa sitä, miten korkean kertaluvun polynomiapproksimaatiota käytetään integrointivälin differentiaaliyhtälön approksimoinnissa. Emme puutu tämän työn puitteissa Runge-Kutta menetelmien johtoon, sillä tuohon löytyy valmiita hyviä lähteitä [12].

Taulukko 2.2: RKN5 algoritmin käyttämät kertoimet [12].

	i=1	i=2	i=3	i=4
$\bar{b}_i$	$\frac{14}{336}$	$\frac{100}{336}$	$\frac{54}{336}$	0
$b_i$	$\frac{14}{336}$	$\frac{125}{336}$	$\frac{162}{336}$	$\frac{35}{336}$
$a_{ij}$	i=1	i=2	i=3	$c_j$
$j = 1$				0
$j = 2$	$\frac{1}{50}$			$\frac{1}{5}$
$j = 3$	$\frac{-1}{27}$	$\frac{7}{27}$		$\frac{2}{3}$
$j = 4$	$\frac{3}{10}$	$\frac{-2}{35}$	$\frac{9}{35}$	1

**RKN5** -menetelmä, eli Rungen, Kuttan ja Nyströmin 5. kertaluvun numeerinen integrointi on ollut käytössä kaikissa tämän työn laskuissa. Seuraavissa lausekkeissa (2.14), (2.15) ja (2.16) on havaittavissa miten menetelmä laskee yhden integrointivälin approksimaation. Integrointia varten pitää ensin tietää satelliitin kiihtyvyys integroinnin aika-askeleen eri vaiheissa. Kiihtyvyys voidaan määrittää lausekkeen

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{a}(t_0 + c_i h, \mathbf{r}_0 + c_i h \mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} \mathbf{k}_j) \quad (2.14)$$

avulla. Tässä kertoimet  $c_i$  ja  $a_{ij}$  edustavat valmiiksi laskettuja, juuri tähän alkuarvo-

ongelmaan soveltuvia kertoimia ja ne voidaan löytää taulukosta 2.2. Funktio  $\mathbf{a}(t, \mathbf{r})$  on kiihtyvyyttä arvioiva voimamalli. Aikaväli  $h$  on puolestaan integroinnin aika-askeleen pituus. Laskettavat kertoimet  $\mathbf{k}_n$  ovat tarpeellisia itse numeerisessa integroinnissa, ja ne lasketaan edellisen kaavan (2.14) avulla rekursiivisesti, lähtien tilanteesta  $i = 1$ . RKN5 -menetelmässä indeksiä kasvatetaan aina 4:ään asti. Seuraavat rekursiot lasketaan kasvattamalla indeksiä  $i$ . Kertoimet  $\mathbf{k}_1$ - $\mathbf{k}_4$  edustavat satelliittiin kohdistuvia arvioituja kiihtyvyyksiä yhden aika-askeleen välillä, kertoimien  $c_i$  ilmoittamina aikoina. Kuten seuraavista lausekkeista havaitaan, RKN5 menetelmä perustuu näiden tietyillä ajanhetkillä laskettujen kiihtyvyyksien käyttöön. Ensin lasketaan paikka seuraavalla aika-askeleella lausekkeella

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + h\mathbf{v}_0 + h^2 \sum_{j=1}^4 \bar{b}_i \mathbf{k}_j. \quad (2.15)$$

Parametrit  $\bar{b}_i$  on myös johdettu Taylorin approksimaation kautta alkuarvo-ongelmaan sopiviksi ja ne löytyvät kertoimien  $c_i$  ja  $a_{ij}$  tapaan taulukosta 2.2. Seuraavaksi jäljellä on enää nopeuden selvittäminen uuden aika-askeleen alussa. Tuo nopeus saadaan kaavalla

$$\mathbf{v}_1 = h\mathbf{v}_0 + h \sum_{j=1}^4 b_i \mathbf{k}_j. \quad (2.16)$$

Parametri  $b_i$  on myös määritetty vastaavasti, kuin  $\bar{b}_i$  ja numeeriset arvot kyseisille parametreille löytyvät taulukosta 2.2.

Tarkemman matemaattisen esityksen RKN -algoritmista voi löytää vaikkapa Sepäsen diplomityöstä [35] tai Hairerin kirjasta [12]. Tässä työssä on käytetty numeerisena integraattorina yksinomaan RKN5 algoritmia. Periaatteessa kaavan (2.13) integrointitapa ei merkittävästi eroa Runge-Kutta-Nyström algoritmista. Tämän algoritmin parannukset löytyvät lähinnä siitä, että Eulerin menetelmään verrattuna arvioidaan myös kiihtyvyyden muutokset integroinnin aika-askeleen matkalla. Hieman samankaltaisia parannuksia käyttää myös Gauss-Jackson algoritmi. Jälkimmäinen menetelmä on laskennallisesti jonkin verran nopeampi, joten useimmissa tapauksissa se on käyttökelpoisempi tapa suorittaa numeerinen integrointi.

### 2.3.2 Gauss-Jackson integrointi

Gauss Jackson integrointi on hieman kehittyneempi tapa laskea numeerisesti taivaankappaleiden ratoja. Menetelmä on ollut yleisessä käytössä 1960-luvulta lähtien [3]. Menetelmä perustuu iteroimalla tehtävään ennustustarkkuuden parantamiseen. Tarkemmin sanottuna se on kiinteän askeleen ennustaja-korjaaja -menetelmä.

Menetelmän tehokkuus perustuu siihen, että jokaisella aika-askeleella tehtyä en-

nustustyötä voidaan hyödyntää seuraavien aika-askelten laskemisessa. Tällöin voidaan käyttää pidempää aika-askelta ja laskennallinen taakka vähenee. Tarkemmin ilmaistuna Gauss-Jackson integrointi nopeuttaa ennustamista sitä enemmän, mitä monimutkaisempi voimamalli on [14]. Ainoastaan ennustusta aloitettaessa pitää laskea kattavammin satelliitin sijainteja ja nopeuksia, sillä alussa on tiedossa vain yksi nopeus ja paikka, ei koko radan kaarta. Koska tässä työssä oli käytössä yliopiston rinnakkaislaskentajärjestelmä Tutgrid, emme erityisesti tarvinneet tätä nopeaa integrointimenetelmää. Gauss-Jackson integroinnin käyttö ei olisi myöskään vaikuttanut tutkimuksen lopputulokseen. Vaikka tässä työssä menetelmää ei hyödynnettykään, työryhmämme jäsenet siirtyvät tulevaisuudessa käyttämään kyseistä algoritmia sen laskennallisen keveyden ja nopeuden vuoksi. Erityisesti jos tarkoituksena on laskea rataennusteita kannettavissa paikannuslaitteissa, algoritmin keveys näyttelee tärkeää osaa akkukeston maksimoinnissa.

Gauss-Jackson integraattorin kertaluvulla tarkoitetaan jokaisen ennustuspisteen ympärillä olevien ratakaaren approksimaatiopisteiden määrää. Oletetaan, että käytetään 8. kertaluvun Gauss-Jackson menetelmää. Kun ennustus aloitetaan, tiedetään satelliitin nopeus ja sijainti alussa. Seuraavaksi arvioidaan käytössä olevalla voimamallilla ja esimerkiksi Runge-Kutta -menetelmällä nopeudet, sijainnit ja kiihtyvyydet 8:ssa ratakaaren approksimaatiopisteessä (4 pistettä menneisyyteen ja 4 tulevaisuuteen). Approksimaatiopisteet ovat jaettu integrointivälien mukaisesti. Siispä kahden perättäisen pisteen aikaväli on vakio. Nyt ennustusta aloitettaessa on siis tiedossa sijainnit, nopeudet ja kiihtyvyydet tarkasteltavan satelliitin ratakaareltayhdeksässä eri pisteessä (joista keskimääräinen on aloitussijainti). Koska nuo ovat kuitenkin vain arvioita, niitä pitää tarkentaa. Tuo approksimaatioiden tarkentaminen tehdään Gauss-Jackson menetelmän keinoin iteratiivisesti.

Gauss-Jackson menetelmää alustettaessa pitää laskea seuraavaksi parametrit  $\mathbf{s}_0$  ja  $\mathbf{S}_0$ . Nuo ovat siis aloitussijaintiin liittyviä vakioita ja ne lasketaan kaavoilla (2.17a) ja (2.17b). Kiihtyvyys  $\mathbf{a}_0$  on siis kiihtyvyys aloitusajankohdalla ja kiihtyvyydet  $\mathbf{a}_n$  ovat satelliittiin eri aika-askeleilla kohdistuvat kiihtyvyydet. Kuten aiemmin mainittiin, kiihtyvyydet arvioitiin voimamallin avulla ja kiihtyvyyksiä varten tarvittavat satelliitin sijainnit arvioitiin jollakin toisella numeerisella integraattorilla käytetyn voimamallin kanssa. Kaavat

$$\mathbf{s}_n = \begin{cases} \mathbf{s}_{n-1} + \frac{\mathbf{a}_{n-1} + \mathbf{a}_n}{2} & \text{jos } n > 0 \\ \mathbf{C}_1 - \frac{\mathbf{a}_0}{2} & \text{jos } n = 0 \\ \mathbf{s}_{n+1} - \frac{\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{a}_n}{2} & \text{jos } n < 0 \end{cases} \quad (2.17a)$$

ja

$$\mathbf{S}_n = \begin{cases} \mathbf{S}_{n-1} + \mathbf{s}_{n-1} + \frac{\mathbf{a}_{n-1}}{2} & \text{jos } n > 0 \\ \mathbf{C}_2 - \mathbf{C}_1 & \text{jos } n = 0 \\ \mathbf{S}_{n+1} - \mathbf{s}_{n+1} + \frac{\mathbf{a}_{n+1}}{2} & \text{jos } n < 0 \end{cases} \quad (2.17b)$$

määrittävät parametrit rekursiivisesti lähtien arvosta  $n = 0$ .

Havaitaan, että muuttujat  $\mathbf{C}_1$  ja  $\mathbf{C}_2$  ovat tuntemattomia, mutta muut voidaan laskea. Edellä mainitut tuntemattomat voidaan laskea kaavoilla

$$\mathbf{C}_1 = \frac{\mathbf{v}_0}{h} - \sum_{k=-4}^4 \beta_{0,k} \mathbf{a}_k + \frac{\mathbf{a}_0}{2} \quad (2.18a)$$

ja

$$\mathbf{C}_2 = \frac{\mathbf{r}_0}{h^2} - \sum_{k=-4}^4 \alpha_{0,k} \mathbf{a}_k + \mathbf{C}_1. \quad (2.18b)$$

Näissä kaavoissa  $h$  edustaa integrointiaskeleen aikaväliä ja termit  $\alpha_{n,m}$  (Gauss-Jacksonin kertoimet) ja  $\beta_{n,m}$  (summatut Adamsin kertoimet) ovat taulukoituja vakioita, jotka liittyvät integrointiin [3].

Kun parametrit  $\mathbf{s}_0$  ja  $\mathbf{S}_0$  on selvitetty, pitää laskea myös parametrit  $\mathbf{s}_n$  ja  $\mathbf{S}_n$ . Ne voidaan laskea rekursiivisesti samoilla kaavoilla (2.17a) ja (2.17b). Näistä puolestaan voidaan jatkaa eteenpäin ja selvittää uudet nopeus- ja sijaintiarviot iterointikohdissa (8 sijaintia ja alkusijainti). Nopeus- ja sijaintiarvioiden lausekkeissa

$$\mathbf{v}_n = h \left( \mathbf{s}_n + \sum_{k=-4}^4 \beta_{n,k} \mathbf{a}_k \right) \quad (2.19a)$$

ja

$$\mathbf{r}_n = h^2 \left( \mathbf{S}_n + \sum_{k=-4}^4 \alpha_{n,k} \mathbf{a}_k \right) \quad (2.19b)$$

parametrit  $\mathbf{a}_0$ ,  $\mathbf{v}_0$  ja  $\mathbf{r}_0$  edustavat aloitushetkellä satelliittiin kohdistuvaa kiihtyvyyttä sekä sen nopeutta ja paikkaa.

Laskettujen uusien paikka-arvioiden avulla voidaan laskea uudet kiihtyvyyssarviot. Kuten alussakin, kiihtyvyys arvioidaan käytössä olevalla voimamallilla. Seuraavaksi pitää tutkia ovatko kiihtyvyydet supenneet kohti oikean kiihtyvyyden raja-arvoa, vai ovatko ne edelleen liian epätarkkoja. Suppenemisen tarkasteluun riittää usein miten tieto siitä, onko uudet kiihtyvyydet muuttuneet liikaa edellisistä arvioiduista kiihtyvyyksistä. Jos tarkkuus ei ole riittävä, siirrytään takaisin laskemaan uusi iteratio. Siis siirrytään laskemaan uudet  $\mathbf{s}_0$ ,  $\mathbf{S}_0$ ,  $\mathbf{s}_n$  ja  $\mathbf{S}_n$  ja niiden perusteella uudet nopeudet, paikat ja kiihtyvyydet. Iterointia tehdään haluttuun tarkkuuteen tai iterointikertamäärään asti.

**Algoritmin ennustaja -osa:** Kun alkutilanne on saatu määritettyä, siirrytään itse ennustamiseen. Siis käytännössä aletaan tutkia seuraavan aika-askeleen alkutilannetta ja aletaan taas iteroiden etsiä oikeaa satelliitin rataa. Ensiksi määritetään  $\mathbf{S}_{n+1}$  käyttämällä jo entuudestaan tuttua kaavaa (2.17b). Ensimmäisellä kerralla kun tänne asti päästään, lasketaan siis  $\mathbf{S}_{10}$ . Seuraavaksi pitää määrittää uudet sijainnit, nopeudet ja kiihtyvyydet. Jälleen, jos ollaan ensimmäistä kertaa tässä vaiheessa, määritetään  $\mathbf{r}_{10}$ ,  $\mathbf{v}_{10}$  ja  $\mathbf{a}_{10}$ . Seuraavilla kierroksella indeksi olisi 11 ja jokaisella kierroksella indeksi kasvaa aina yhdellä. Vektoreita  $\mathbf{r}_{n+1}$  ja  $\mathbf{v}_{n+1}$  varten pitää käyttää uusia kaavoja

$$\mathbf{v}_{n+1} = h \left( \mathbf{s}_n + \frac{\mathbf{a}_n}{2} + \sum_{k=-4}^4 \beta_{5,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right) \quad (2.20a)$$

ja

$$\mathbf{r}_{n+1} = h^2 \left( \mathbf{S}_{n+1} + \sum_{k=-4}^4 \alpha_{5,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right). \quad (2.20b)$$

Kiihtyvyydet määritetään normaalisti voimamallin avulla.

**Algoritmin korjaaja -osa:** Kaikki on tässä vaiheessa valmista itse Gauss-Jackson integroinnin aloittamiseen. Nyt on tiedossa suurpiirteinen paikka ja nopeus seuraavalla ajanhetkellä  $t_{n+1}$ . Seuraavaksi voidaan arvioida kiihtyvyys  $\mathbf{a}_{n+1}$  käytettävällä voimamallilla ja alkaa iteroida tulosta tarkemmaksi. Ensimmäisellä kerralla, kun tähän kohtaan päästään  $n + 1 = 10$ .

Kun ensimmäiset arviot paikalle, nopeudelle ja kiihtyvyydelle on tiedossa aikaindeksillä  $n + 1$ , sijoitetaan  $n = n + 1$  ja jatketaan eteenpäin. Aletaan iteroida paikkaa ja nopeutta niin kauan, että päästään haluttuun tarkkuuteen (tai lopetetaan iterointi laskennallisen tehokkuuden nimissä). Jokaisen iterointikerran aikana tehdään samat askeleet. Ensin määritetään  $\mathbf{s}_n$  jo käytetyn kaavan (2.17a) avulla. Selvyiden vuoksi mainittakoon, että ensimmäisellä kierroksella lasketaan siis  $\mathbf{s}_{10}$  ja indeksi kasvaa aina, kun siirrytään aika-askel eteenpäin.

Seuraavaksi määritetään uudet arviot nopeuksille ja paikoille kaavoilla

$$\mathbf{v}'_n = h \left( \mathbf{s}_n + \sum_{k=-4}^4 \beta_{4,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right) \quad (2.21a)$$

ja

$$\mathbf{r}'_n = h^2 \left( \mathbf{S}_n + \sum_{k=-4}^4 \alpha_{4,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right). \quad (2.21b)$$

Näitä kaavoja käytetään kuitenkin vain ensimmäisellä iterointikerralla. Ennustus-tarkkuuden nostaminen tehdään seuraavassa kappaleessa osoitetulla tavalla.

Paikan, nopeuden ja kiihtyvyyden tarkkuutta aletaan iteroimaan seuraavasti:

Lasketuilla nopeuksilla ja paikoilla lasketaan korjaukset. Korjausten laskemiseen täytyy tehdä voimamallin avulla uudet kiihtyvyysarviot  $\mathbf{a}_n'$ . Tarkentuneilla paikan ja nopeuden arvioilla taas voidaan iteroida uudet, aina tarkemmat arviot, kunnes päästään riittävään tarkkuuteen. Kuten kaavoista (2.22) ja (2.23) voidaan havaita, iterointi tarkoittaa vain näiden kaavojen viimeisten termien uudelleenlaskemista jokaisella kierroksella. Käytännössä tämä tarkoittaa voimamallin käyttöä uusilla paikka-arvioilla, jolloin saadaan laskettua kiihtyvyys  $\mathbf{a}_n'$  aina tarkemmin. Iterointiin tarkoitettut kaavat

$$\mathbf{v}_n' = h \left( \mathbf{s}_n + \sum_{k=-4}^3 \beta_{4,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right) + h \beta_{4,4} \mathbf{a}_n' \quad (2.22)$$

ja

$$\mathbf{r}_n' = h^2 \left( \mathbf{S}_n + \sum_{k=-4}^3 \alpha_{4,k} \mathbf{a}_{n+k-4} \right) + h^2 \alpha_{4,4} \mathbf{a}_n' \quad (2.23)$$

ovat siis käytössä sen jälkeen, kun voidaan laskea kiihtyvyyden korjaus  $\mathbf{a}_n'$  korjatun paikka-arvion  $\mathbf{r}_n'$  mukaan.

Kun on saavutettu iteroimalla joko haluttu tarkkuus tai on iteroitu riittävän monta kertaa, ettei laskentatehokkuuden nimissä kannata jatkaa, asetetaan nopeus, sijainti ja kiihtyvyys viimeisen iterointikerran mukaiseksi. Siirrytään seuraavaksi takaisin Gauss-Jacksonin algoritmin **ennustaja -osaan** (ellei ennustuksen ajallinen pituus ole jo riittävä).

Ohjelmakoodia kirjoittaessa kannattaa ehdottomasti huomioida, ettei tule laskettua samoja summalausekkeita moneen kertaan. Optimoinnin vaikutus ennustusnopeuteen on huomattava. On myös esitetty perusteluita sille, että Gauss-Jacksonin algoritmin korjaaosaa ei välttämättä tarvittaisi ollenkaan. Silloin pitäisi vain puolittaa aika-askel, jolloin tarkkuus todennäköisesti paranee. Tällöin pitää kuitenkin olla erityisen huolellinen, että voimamallin epälineaarisuudet ei tuota odottamattomia tuloksia [14].

Tämän luvun esitys Gauss-Jacksonin algoritmista on hyvin yksinkertaistettu, eikä käsittele algoritmin matemaattisia perusteita. Jos tarkempi toiminnallisuus tuntuu tärkeältä ymmärtää, kannattaa aiheeseen perehtyä tarkemmin. Sopivia englanninkielisiä lähteitä löytyy internetistä. [3]

Kun sopiva integrointimenetelmä on valittu, pitää formuloida ratkottava differentiaaliyhtälö. Tässä vastaan tulee eri voimien tuottamien kiihtyvyyksien approksimointi.

### 3. VOIMAMALLIN TARKENTAMINEN

Voimamalli, joka esiteltiin edellisessä kappaleessa tuottaa hyvällä numeerisella integraattorilla keskimäärin noin 10-100 metrin virheen paikka-arvioon yhden viikon ennusteessa. Tyypillisesti virhettä on eniten etenemissuunnassa ja etäisyys maapallolta pysyy muutaman metrin tarkkuudella oikeana. Radiaalisen virheen voidaan siis olettaa pysyvän alle 5 metrin suuruisena. Lisäksi nopeuden suhteen kohtisuoraa virhettä ei tule sen enempää, kuin radiaalistakaan virhettä. Lisäksi virheeseen näyttää jäävän aikariippuvia termejä, joiden jaksonaika on täsmälleen satelliitin kiertoaika maapallon ympäri.

#### 3.1 Maankuoren vuorovaihtelut

Maapallon pyöriminen ja liikkuminen saavat aikaan Kuun ja Auringon gravitaatiokenttien vaikutuksesta vuorovetenä tunnetun ilmiön. Käytännössä ilmiö johtuu siitä, että maapallo putoaa gravitaatiopotentiaalin gradientin suuntaan, mutta tuo gradientti ei ole sama maapallon ulkopinnalla, kuin keskipisteessä. Sillä maapallon reunalla millä gravitaatiokentän tuottaja on lähempänä, kiihtyvyys on suurempi ja vastakkaisella reunalla pienempi. Tuo ”häiriöpotentiaali” aikaansaa maapallon koordinaatistossa pieniä muutoksia normaaliin putoamiskiihtyvyyteen. Lopulta nuo kiihtyvyydet näkyvät selvimmin vuorovesien muodossa. Käytännössä kuitenkin vuorovesien vaikutus satelliittien ratoihin on hyvin pientä.

Tämän häiriöpotentiaalin vaikutukset eivät kuitenkaan lopu siihen. Tavallisesti ajatellaan, että kiinteä kallio ei joustaa. Toisaalta jokainen tietää, että metalleista voidaan valmistaa joustavia rakennelmia. Maapallon sisus on suurimmalta osalta kiinteän ja sulan kiven sekoitusta. Tähän häiriöpotentiaalimme voi rauhassa vaikuttaa. Maapallon ohut kuori puolestaan joustaa maapallon vaipassa olevan sulan magman liikkeiden ja häiriöpotentiaalin voimavaikutuksen seurauksena. Nämä liikkuvat massat ovat huomattavasti suurempia, kuin itse merien vuorovedet (vaikka merien vuoroveden maanpäälliset vaikutukset ovatkin paljon selvempiä, kuin maankuoren joustaminen).

Montenbruckin *Satellite orbits* -kirjassa [27] on annettu käyttökelpoinen malli maankuoren vuorovaihteluiden vaikutusten laskemiseksi. Käydäänpä lyhyesti läpi miten se toimii.

Totesimme kappaleessa 2.2.3, ettei maapallon gravitaatiopotentiaali ole täysin



pallosymmetrinen vaan, siinä on poikkeamia, jotka johtuvat vuoristoista ja muista maapallon rakenteellisista epähomogeenisuuksista. Poikkeamat puolestaan voidaan määrittää matriisin muotoon, jossa jokainen alkio edustaa Legendren funktioiden kerrointermejä. Kun kaikkien alkioiden määrittämät funktiot on laskettu ja summattu yhteen, tiedetään gravitaatiopotentiaali ja tätä derivoimalla saadaan laskettua gravitaatiokiihtyvyys halutussa pisteessä. Montenbruckin kirjassa esitetty malli maankuoren vuorovaihteluiden laskemiselle nojautuu Legendren funktioiden kertomien muuntamiselle häiriöpotentiaalin vaikutuksen mukaan, kuten kaavasta (3.1) havaitaan. Lausekkeessa

$$\begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{2m} \\ \Delta \bar{S}_{2m} \end{Bmatrix} = 4k_{2,m} \left( \frac{GM}{GM_{\oplus}} \right) \left( \frac{R_{\oplus}}{s} \right)^3 \sqrt{\frac{(4)(2-m)!^3}{(2+m)!^3}} P_{2m}(\sin \phi) \begin{Bmatrix} \cos(m\lambda) \\ \sin(m\lambda) \end{Bmatrix} \quad (3.1)$$

$n = 2$  ja  $m$  edustavat korjauskerroinmatriisien indeksejä. Parametrit  $4k_{2,m}$  ovat Lovén lukuja toisen kertaluvun korjaukselle. Näiden numeerinen arvo on noin 0,3 ja tarkat arvot voidaan löytää esimerkiksi IERS:n eli *International Earth Rotation Services* technical note 36:sta [16].  $G$ ,  $M_{\oplus}$  ja  $M$  edustavat gravitaatiovakiota, maapallon massaa ja häiriöpotentiaalin tuottajan massaa.  $R_{\oplus}$  edustaa potentiaalin laskupisteen etäisyyttä maapallon keskipisteestä ja  $s$  häiriöpotentiaalin etäisyyttä maapallon keskipisteestä. Kulmat  $\phi$  ja  $\lambda$  edustavat normaalisti leveys- ja pituuspiirien kulmia. Kannattaa tässä vaiheessa huomioida, että jos rataennustusmalli käyttää normalisoimattomia parametreja, niin myös korjaustermit  $\Delta \bar{C}_{2m}$  ja  $\Delta \bar{S}_{2m}$  pitää antaa oikeassa muodossa. Normalisointi voidaan poistaa lausekkeen

$$\begin{Bmatrix} \Delta C_{nm} \\ \Delta S_{nm} \end{Bmatrix} = \sqrt{\frac{(n+m)!}{(2-\delta_{0m})(2m+1)(n-m)!}} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{C}_{nm} \\ \Delta \bar{S}_{nm} \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

osoittamalla tavalla. Kyseessä on aiemman normalisointikaavan (2.5) käänteinen muoto. Tässä lausekkeessa deltafunktio  $\delta_{0m}$  saa arvon 1, kun  $m=0$  ja muulloin sen arvo on 0. Kun kaikki halutut korjauskertoimet on laskettu, voidaan maapallon gravitaatiopotentiaalin luoma kiihtyvyys laskea normaalisti. On huomionarvoista, että samat korjauskertoimet toimivat kaikille satelliiteille, kunhan vain ajanhetki pysyy vakiona. Kun siis teemme rataennusteet usealle satelliitille samanaikaisesti, voimme pitää lisääntyntä laskentataakkaa minimaallisena.

Tämä kiinteän Maan vuorovaihteluiden korjaus on suuntaa antava, eikä ole täydellinen esitys todellisuudesta. Esimerkiksi 4:n kertaluvun korjaus on mainittu IERS:n technical note 36:ssa [16] riittävän suurena, ettei sitä voi jättää huomiotta. Jos rataennustusmalliin otetaan myöhemmin käyttöön tarkempi kiinteän Maan vuorovaihteluiden ja vuoroveden malli, pitää huomioida myös, että käytetään oikeaa

maapallon gravitaatiomallia. Esimerkiksi EGM2008 mallista on kaksi eri versiota. Toista kutsutaan Zero-Tide -malliksi ja toista Tide-Free -malliksi. Näistä ensimmäinen on maapallon keskimääräinen gravitaatiokenttä kun siihen vaikuttaa Auringon ja Kuun gravitaatiokenttä. Toinen on puolestaan sellainen gravitaatiomalli, joka on muodostettu Zero-Tide -mallista ottamalla pois ulkoisten gravitaatiovoimien tekemät keskimääräiset muutokset. Tämä Tide-Free -malli siis on tarkoitettu sellaisille rataennustummalleille, jotka ottavat vuorovesi-ilmiöt tarkasti huomioon. Tide-Free -malli siis edustaa sitä maapallon gravitaatiopotentiaalia, joka maapallolla olisi, jos se olisi kaukana muista gravitaatiopotentiaalin tuottajista (kaukana aurinkokunnasta).

On huomionarvoista, että Montenbruckin kirjassa esitetty kiinteän maankuoren vuorovaihteluiden korjaus ei suinkaan ole ainoa laatuaan. Esimerkiksi IERS:n Technical Note 36:ssa [16] on esitetty toinen malli korjaukselle, joka on pääpiirteittäin samanlainen, mutta skaalauskerroimiltaan hieman poikkeava. Tämän korjauksen kanssa laskettiin myös noin 400 vuotta rataennusteita ja korjaus toimi järjestelmällisesti. Tilastollisesti katsoen tämä jälkimmäinen korjaus auttoi kuitenkin puolta vähemmän, kuin työssä enemmän käytetty Montenbruckin korjaus. Koska tämän jälkimmäisen korjausmallin käyttö ei tuonut aivan yhtä huomattavaa parannusta rataennusteiden tarkkuuteen, kuin Montenbruckin, siihen ei erityisemmin keskitytä tässä tutkimuksessa. Sekä Montenbruckin, että IERS:n korjauksien ohjelmakooditautukset on löydettävissä liitteestä B. Kumpikin ohjelmakoodinpätkä sisältää vain 2. kertaluvun korjauksen.

### 3.2 JPL almanakkadatan käyttö

Radan ennustusmallimme hyödynsi alun perin analyyttisiä paikkaratkaisuja Auringolle, Kuulle ja nutaatiolle [27]. Näistä aiheutuu pientä virhettä, joka voidaan korjata ottamalla käyttöön tarkempi almanakkadata, joka on laskettu planeettojen liikkeiden mittausdatasta integroimalla. Nykyään on käytössä useita tähtitieteellisiä almanakkoja. Rataennustusmallimme käyttää vanhaa ICRS koordinaatistoa, jota kutsutaan myös J2000:ksi. On siis perusteltua käyttää myös hieman vanhempaa almanakkaa, ettei tarvitse tehdä ylimääräistä koordinaatistomuunnosta uudesta ICRF:stä, jonka origo on aurinkokunnan gravitaatiokeskipisteessä ja akselit määrätty IERS:n mukaisesti. Rataennustusmallimme koordinaatistoa käyttää DE200 -sarjan aurinkokunnan almanakat. DE202 näytti sopivammalta tarpeisiin [8], sillä on tuoreimmasta päästä oleva almanakka, joka tarjoaa koordinaatit vanhemmassa J2000 -koordinaatistossa.

Uudemman DE400 -sarjan almanakan käyttö olisi myös perusteltua, jos rataennustusmallimme alkaa käyttää uudempaa IERS:n määrittelemää referenssikoordinaatistoa. DE400-sarjan almanakat sisältävät planeettadatan tässä referenssikoordinaatistossa [22]. Periaatteessa uudempi almanakka on tarkempi, mutta eron ei

pitäisi olla merkittävä. Siispä vanhemmankin almanakan käyttö tuottaa riittävän tarkkaa tulosta. DE202 pitäisi olla kuitenkin teoriatasolla huomattavasti tarkempi, kuin alkuperäinen analyyttinen Aurinko/Kuu paikkalaskelma. Tässä tutkimuksessa käytetyn analyyttisen ratkaisun tarkkuus on muutaman kaariminuutin luokkaa [27] ja JPL:n almanakan tarkkuus on muutaman millikaarisekunnin luokkaa [8]. Tarkemmatkaan analyyttiset ratkaisut [26] eivät ole yhtä tarkkoja, kuin JPL:n almanakat. Lisäksi tarkemmat analyyttiset ratkaisut ovat hitaita laskea, sillä ne vaativat useiden kymmenien sini ja kosinitermien laskemista per taivaankappale. Kuten kappaleesta 6 ja liitetaulukoista ilmenee, Auringon ja Kuun tarkemmat paikkatiedot auttavat rataennusteiden tarkentamisessa näkyvästi ja miltei aina myönteiseen suuntaan.

DE -almanakkadatan käyttöön löytyy valmiit funktiot [9]. Näillä voisi laskea almanakasta planeettojen ja taivaankappaleiden sijainnit tietämättä miten tuo tehdään matemaattisesti. Omien funktioiden kirjoittaminen almanakkadatan käyttöön kuitenkin kannattaa. Niiden avulla voidaan esimerkiksi minimoida tarvittavat levyoperaatiot almanakkadatiedoston kanssa ja siten laskenta-aika lyhenee. Käydään lyhyesti läpi miten almanakkadataa voidaan lukea ja miten siitä saadaan laskettua taivaankappaleiden sijainnit.

DE -almanakkadata koostuu otsikkotiedostosta ja datatiedostoista. Otsikkotiedosto sisältää informaation datatiedostojen rakenteesta ja datatiedostot sisältävät jokainen oman tietyn aikavälin sijaintidatan (ja maapallon nutaatio-/libraatiodatan, riippuen almanakasta). Kun datatiedoston rakenne on selvillä, sitä voidaan alkaa lukea. Alla olevassa taulukossa on (3.1) on esitetty pieni pätkä JPL almanakasta luettua dataa havaintoesimerkiksi.

Taulukko 3.1: Merkkejä DE202 almanakan datatiedoston alusta

2.451536500000000000D+06	2.451568500000000000D+06	<b>-3.380074239033022000D+07</b>
<b>1.130787572808741000D+07</b>	<b>3.978603505279453000D+05</b>	<b>-2.556316432658048000D+04</b>
<b>9.251197414963304000D+01</b>	<b>-9.283871370558812000D+00</b>	<b>-2.684952933263904000D-01</b>
<b>1.280757702261259000D-02</b>	<b>-8.152024679926466000D-04</b>	<b>3.703885576641788000D-05</b>
<b>-1.166352460651982000D-06</b>	<b>4.709160497685365000D-08</b>	-5.460721035220987000D+07
-5.990252310923369000D+06	6.569482611969693000D+05	7.510252915472910000D+03
-3.652613735715454000D+02	1.209387370195364000D+01	-6.635337506343654000D-01
1.191127886673971000D-02	-5.091904416729752000D-04	-3.445055347894679000D-06
4.115417718170077000D-07	-4.486244656713875000D-08	-2.570148013299424000D+07

Taulukossa (3.1) on lihavoituna Merkuriuksen x-koordinaatin laskemiseen vaadittavat Chebychevin kertoimet. Sitä ennen esiintyy kaksi lukua, jotka edustavat päivämääriä juliaanisessa kalenterissa. Nuo päivämäärät kertovat tämän almanakkadatan lohkon alku- ja loppuajat. Huomaamme myös, että näiden päivämäärien erotus on täsmälleen 32 päivää, joka on aina yhden lohkon pituus. Lihavoitujen x-

koordinaatin kertoimien jälkeen taulukossa ovat Merkuriuksen y- ja z-koordinaattien laskemiseen vaadittavat kertoimet. Nämä x,y ja z -koordinaattien määrittämiseen vaadittavat kertoimet ovat voimassa 8 päivää kerrallaan. Koska koko lohkon pituus on 32 päivää, pitää näitä 8 päivän pituisia alilohkoja olla peräkkäin 4 kappaletta. Kaikkien Merkuriuksen x,y ja z -kertoimien jälkeen planeetta vaihtuu Venukseen. Tällä planeetalla on vain yksi 32 päivän pituinen alilohko. Se tarkoittaa, että samat Chebychevin kertoimet toimivat koko 32 päivän pituisen lohkon ajan. Maapallolla on kaksi 16 päivän pituista alilohkoa. Alilohkojen määrät eri kohteilla selviävät otsikkotiedostosta. Myös Chebychevin kertoimien määrä on kerrottu otsikkotiedostossa. Tuo määrä vaihtelee eri planeettojen välillä. Esimerkiksi Merkuriuksella ja Venuksella näitä on 12 ja maapallolla 15. Kannattaa huomioda, että jos käytetään jotain muuta JPL almanakkaa, kuin DE202:ta, pitää otsikkotiedostosta tarkistaa datan rakenne aina uusiksi. Ohjelmakoodi, jolla almanakkatiedosto luettiin ja käsiteltiin, voidaan löytää liitteestä C.

Kun Chebychevin kertoimet on selvitetty almanakkadatasta, niitä voidaan huoletta käyttää kunnes lyhin alilohko päättyy. Aina, kun lyhin alilohko päättyy, on syytä päivittää muuttuneet Chebychevin kertoimet. Itse Chebychevin kertoimista tehtävä paikka-arvio voidaan tehdä kaavan

$$f(t) \approx \sum_{i=0}^{n-1} a_i T_i(\tau) \quad (3.3)$$

mukaisesti. Kyseisessä lausekkeessa  $a_i$ :t edustavat almanakkadatasta saatavia Chebychevin kertoimia ja  $T_i$ :t i:nneen asteen Chebychevin polynomeja. Chebychevin polynomithan ovat kaavan

$$T_n(\tau) = \cos(n \cdot \arccos(\tau)) \quad (3.4)$$

osoittamaa muotoa. Edellisessä kaavassa aikamuuttuja  $\tau \in [-1, 1]$  saadaan laskettua sen hetkisen alilohkon alku ja loppuhetkien  $t_1$  ja  $t_2$  sekä laskentahetken  $t$  avulla, kuten kaavasta (3.5) nähdään. Kaavaa

$$\tau = 2 \cdot \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} - 1 \quad (3.5)$$

ja toisia yllä olevia kaavoja käyttämällä saadaan siis yksinkertaisesti laskettua planeettojen sijaintitiedot kullakin ajanhetkellä, kunhan almanakkadatasta on ensin saatu poimittua oikeat Chebychevin kertoimet ohjelman muistiin. Jos lukijaa jää mietityttämään miksei tässä käytetä yleisemmin tunnettua Taylorin sarjakehitelmää, vastaus on yksinkertainen: Taylorin sarjakehitelmä toimii hyvin lähellä approksimaatiopisteitä, kun puolestaan Chebychevin approksimaatio toimii hyvin koko approksimaatiovälillä. Approksimaation laskeminen ei kuitenkaan ole erityisen nopeaa, sillä jokaisen yhden koordinaattiskalaarin laskemiseen joudutaan laskemaan keski-

määrin noin 10 kosinitermiä, jotka summataan yhteen. Mikäli taivaankappaleita on useita, laskettavia termejä kertyy nopeasti yli 100 jokaista aikaväliä kohden.

Kun JPL almanakkadatasta voidaan laskea taivaankappaleiden sijainnit, voidaan huomioida jokaisen planeetan tuottama häiriöpotentiaali. Tuo häiriöpotentiaali lasketaan täsmälleen samalla tavoin, kuin Auringon ja Kuun tuottamat potentiaalitkin, kaavalla (2.6).

Mainittakoon vielä, että esimerkiksi yksi 50 vuoden datapaketti DE202:ssa vie tilaa noin 12,5 Mt. Tarvittavaa datapakettia voidaan toisaalta kätevästi pienentää ottamalla mukaan Chebychevin kertoimet vain yhden vuoden almanakkaa varten. Tarpeettomien planeettojen kertoimet voitaisiin myös jättää pois. Tällöin yhden vuoden almanakka voidaan tallettaa 150–300 kt kokoon.

### 3.3 Suhteellisuusteoriakorjaus maapallon gravitaatiolle

Tavallisesti Newtonilaisessa fysiikassa gravitaation ajatellaan olevan pistemäisten massojen välillä vallitseva vetovoima. Todellisuus on kuitenkin se, että gravitaatio muodostuu alkeishiukkasten yhteisvaikutuksesta. Koska gravitaatio on käytännössä neliulotteisen aika-avaruuden kaareutumista, vaikuttaa gravitaation suuruuteen myös satelliitin liiketila ja ympärillä olevien massojen liike. Gravitaatio voi näyttää olevan juuri maapallon massaan verrannollinen maapallon inertiaalikoordinaatistossa, mutta kun tehdään koordinaatistomuunnos satelliitin koordinaatistoon, tuo voima ei näytä enää samalta. Satelliitin nopeus kiertoradallaan on tarpeeksi suuri (noin 3 km/s eli keskimäärin 1/100 000 valonnopeudesta), että kyseinen koordinaatistomuunnoksen huomioiva korjaus kannattaa tehdä. Periaatteessa maapallon pyöriminenkin on liikettä, joka pitää huomioida koordinaatistomuunnoksessa, mutta tuo nopeus on niin pientä, että sen vaikutus on häviävän pieni. Yleinen suhteellisuusteoria kertoo, että liikkuvan kohteen koordinaatistossa aika kuluu hitaammin ja tila puristuu kokoon liikesuunnan suhteen. Se, miten tuo käytännössä otetaan huomioon gravitaatiovoiman laskemisessa, on kuitenkin melko haastava tehtävä. Satelliitin ratahan pitää olla sama sekä inertiaalikoordinaatistossa, että satelliitin koordinaatistossa, vaikka tehdäänkin suhteellisuusteoreettinen koordinaatistomuunnos. Inertiaalikoordinaatistossa maapallon painovoimaan pitää lisätä siis pieni satelliitin nopeudesta riippuva korjauskerroin, jolloin gravitaatiovoima on näennäisesti suu- rempi, kuin liikkumattomaan tarkkailijaan kohdistuva gravitaatiovoima satelliitin radan vastaavissa pisteissä.

Montenbruckin kirjassa [27] on lyhyesti käyty läpi tensorilaskennan kautta tehtävä korjauksen arviointi. Tuossa kirjassa on päädytty lausekkeeseen

$$\Delta \mathbf{a}_{g,\text{Maa}} = -\frac{GM_{\oplus}}{r^2} \left( \left( 4\frac{GM_{\oplus}}{c^2 r} - \frac{v^2}{c^2} \right) \mathbf{e}_r + 4\frac{v^2}{c^2} (\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_v) \mathbf{e}_v \right), \quad (3.6)$$

jossa  $G$  edustaa jälleen gravitaatiovakiota,  $M_{\oplus}$  maapallon massaa,  $r$  etäisyyttä maapallon keskipisteestä,  $c$  valonnopeutta ja  $v$  satelliitin nopeutta. Vektorit  $\mathbf{e}_r$  ja  $\mathbf{e}_v$  edustavat satelliitin sijainnin suuntavektoria maapalloseskeisessä inertiaalikoordinaatistossa ja satelliitin yksikkönopeusvektoria. Tiedetään, että useimmat GNSS satelliitit ovat miltei ympyräradoilla, joten lausekkeen (3.6) pistetulo voidaan approksimoida arvolla 0 ja parametri  $\frac{GM_{\oplus}}{r}$  on pyöreästi  $v^2$ . Tästä seuraa lausekkeen sieveneminen kauniiseen muotoon

$$\Delta \mathbf{a}_{g, \text{Maa}} \approx -\frac{GM_{\oplus}}{r^2} \mathbf{e}_r \left( 3 \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (3.7)$$

Edellinen kaava on hyvä approksimaatio lähes ympyräradalla oleville satelliiteille. Täydellisellä ympyräradalla olevan satelliitin nopeus pysyy vakiona. Siis yksinkertaisimmillaan satelliitille laskettava maapallon gravitaation suhteellisuusteoreettinen korjaus voitaisiin approksimoida yhden reaalitylukukertoimen avulla, joka skaalaisi maapallon tuottamaa gravitaatiovoimaa. Korjausta laskiessa satelliitin nopeus kannattaa kuitenkin ottaa huomioon, sillä satelliittiin vaikuttaa monia voimia eikä se pysy täydellisellä ympyräradalla (ellei se käytä moottoreitaan kovin usein ratakorjauksiin).

Periaatteessa tämä malli on rakennettu sen oletuksen pohjalta, että maapallo on pistemäinen massa. Se ei täsmälleen ottaen pidä paikkaansa, mutta koska suhteellisuusteoriakorjaus maapallon gravitaatiolle on merkitykseltään pieni, tämä arvio ei tuota merkittävää virhettä lopputulokseen.

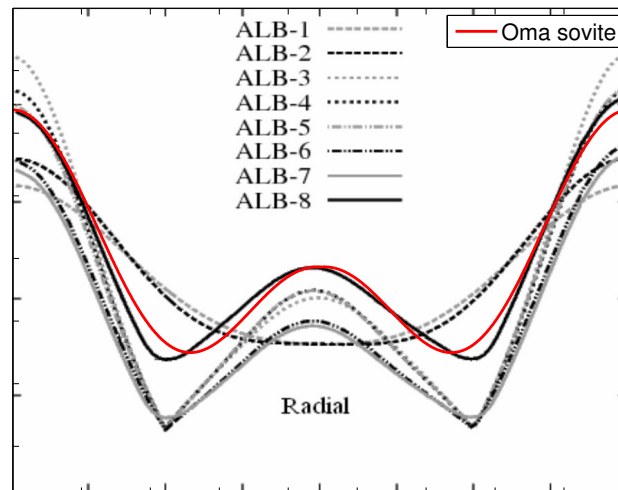
### 3.4 Maapallon säteilypaine

Kannattaa huomioida alkuunsa, että tässä tutkimuksessa tehty maapallon säteilypaineen voimatarkennus ei toimi kovinkaan hyvin. Lisäksi säteilypaine pitäisi kalibroida joka kerta uudelleen, kun voimamalliin tehdään lisäyksiä. Esimerkiksi suhteellisuusteoriakorjaus ja antennin työntövoima ovat lähes samassa suuruusluokassa, kuin maapallon säteilypaine. Suhteellisuusteoriakorjaus ja antennin työntövoima ovat lisäksi vastakkaisuuntaiset. Siten esimerkiksi toisen pois jättäminen voisi heikentää rataennustusmallin toimivuutta paljonkin.

Seuraavaksi tehtävät kehitysaskeleet säteilypainemalliin saattavat kuitenkin hyötyä tämän testatun voimatarkennuksen ymmärtämisestä. Nähtävästi nykyinen rataennustusmallimme sisältää ainakin osan maapallon säteilypaineen vaikutuksesta. Muutoinhan tämän korjauksen olisi pitänyt auttaa enemmän. Toinen vaihtoehto maapallon säteilypaineen huomioimiselle olisi käyttää parempaa Auringon säteilypainemallia (kuten Extended CODE eli *Center for Orbit Determination in Europe* -mallia [11]) ja olettaa maapallon säteilypaine osaksi sitä. Tärkeässä osassa tätä metodologia olisi kuitenkin säteilypainemallin kalibrointi.

Montenbruckin kirjan [27] mukaan maapallon lähettämä ja heijastama sähkömagneettinen säteily on huomattavassa osassa satelliittiin vaikuttavien voimien joukossa. Myös jotkin toiset lähteet viittaavat samaan [32]. Toisaalta tämän voiman kanssa samassa suuruusluokassa on myös satelliitin itsensä emittoima infrapunasäteily [1]. Kyseisen emittoitujen säteilyn tuottamaa voimaa allekirjoittanut ei yrittänyt ottaa huomioon.

Suurimman osan satelliitin kokemasta säteilypaineen työntövoimasta tulee sähkömagneettisen säteilyn osumisesta aurinkopaneeliin, sillä aurinkopaneelit muodostavat suurimman osa satelliitin pinta-alasta. Maasta tuleva säteilypaine vaikuttaa satelliittiin siis voimakkaimmin, kun satelliitin aurinkopaneelit ovat kohdistettuina maapalloa kohti. Maapallo emittoi runsaasti lämpösäteilyä sekä varjon, että Auringon puolilta, mutta vain Auringon puolelta maapallo voi heijastaa Auringon sähkömagneettista säteilyä takaisin avaruuteen. Säteilyn kokonaisvoimakkuus siis vaihtelee satelliitin, Auringon ja Maan sijaintien funktiona. [38]



Kuva 3.1: Tämän tutkimuksen albedon testivoiman vertautuvuus aiempaan Rodriguez-Solanon tutkimukseen [32]. Sovite pyritty saamaan vastamaan ALB-8 kuvaajaa. Musta-valkoinen pohjakuva on otettu edellä mainitusta tutkimuksesta ja punainen sovite edustaa oman mallimme tuottamaa korjausvoimaa.

Maapallon säteilypaine on siis voimakkaimmillaan aikana, jolloin satelliitti on maapallon ja Auringon välissä. Tällöin satelliitin aurinkopaneelit ovat kohdistuneet Maata kohti, sillä paneelien toinen puoli on kohdistuneena Aurinkoon. Toisaalta säteilypaine on myös merkittävää vastakkaisella puolella planeettaa, kun aurinkopaneelit on suunnattu kohti maapalloa ja ne absorboivat maapallon lähettämää lämpösäteilyä. Voiman minimi löytyvät teoreettisesti näiden kiertoradan pisteiden välistä, jolloin maapallon lähettämä sähkömagneettinen säteily pääsee virtaamaan

suurimmalta osalta aurinkopaneelien ohi (johtuen aurinkopaneelien asennosta).

Tässä tutkimuksessa maapallon tuottama säteilypainee pyrittiin ottamaan huomioon yksinkertaisen semi-empiirisen mallin avulla. Tässä on käytetty hyödyksi jo olemassa olevaa säteilypainemallia ja lisätty tähän vain voimavektori, joka osoittaa pois päin maapallosta. Tuon voimavektorin suuruus vain riippuu maapallon ja Auringon sijainneista satelliittin nähden.

Edellisten kappaleiden ajatusten ja eri lähteiden tietojen pohjalta on rakennettu empiirinen lauseke, joka kuvaa maapallon säteilypaineen aikaansaamaa voimaa satelliitin sijainnin funktiona. Kaavan (3.8) tuottama kiihtyvyys on suuruusluokaltaan kutakuinkin antennin säteilypaineen ja suhteellisuusteoriakorjauksen suuruusluokkaa ( $2 \cdot 10^{-9} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ). Maapallon säteilypaineen kaavassa

$$\mathbf{a}_{srp, \text{Maa}} = (\alpha_{alb,1} + \alpha_{alb,2} \cdot \psi_{alb}(\gamma)) \cdot (1 + \epsilon) \chi_{PP} \frac{A_{sat}}{m_{sat}} \frac{(AU)^2}{\|\mathbf{r}_{sun} - \mathbf{r}_{sat}\|^2} \cdot \frac{\mathbf{r}_{sat}}{\|\mathbf{r}_{sat}\|} \quad (3.8)$$

$\psi_{alb}(\gamma)$  on kulmasta  $\gamma$  riippuva funktio ja se on tarkemmin esitetty kaavassa (3.9). Muut parametrit ovat samat, kuin Auringon säteilypainemallissa. Kulma  $\gamma$  on kulma, joka muodostuu Auringon ja Maan välille katsottaessa satelliitin sijainnista. Vakiot  $\alpha_{alb,1}$  ja  $\alpha_{alb,2}$  on empiiriset parametrit, joilla rataennusteiden virheet minimoituvat. Käytännössä nuo uudet  $\alpha$ :t edustavat sitä miten paljon satelliitin sijainti vaikuttaa maapallon säteilypaineen tuottamaan kiihtyvyyteen. Tämän työn aikana ne arvioitiin vain yhdelle GPS satelliitille tekemällä useita testejä eri arvoilla ja valitsemalla eniten ennustusta tarkentaneet parametrit. Vakio  $\alpha_{alb,1}$  kertoo sen, mikä muodostunut uusi kiihtyvyys on minimissään, kun funktio  $\psi_{alb}(\gamma)$  saa minimiarvonsa 0. Vakio  $\alpha_{alb,2}$  taas kertoo miten paljon suurempi kiihtyvyys on, kun funktio  $\psi_{alb}(\gamma)$  saa maksimiarvonsa 1. Tuon funktion 3.9 laskukaava näkyy alla. Käytännössä tämä albedon laskentakaava

$$\psi_{alb}(\gamma) = \frac{(\frac{1}{2}|\gamma|^2 + 10) \cdot \text{sinc}(0,8\gamma) + 2,5243}{12,5243} \quad (3.9)$$

on löydetty etsimällä graafisesti empiiristä funktiota, joka tuottaa samankaltaisen funktion, kuin mitä aiempien tutkimusten mukaan maapallon säteilypaineen pitäisi tuottaa [32]. Sovitteen toimivuutta voi verrata graafisesti mallina käytettyyn albedotutkimukseen kuvassa 3.1. On selvää, että sovite ei ole täydellinen, mutta laskentatehokkuuden nimissä emme voi pyrkiäkään erityisen tarkkaan voimallinnukseen. Jos myöhemmin päädyttäisiin tarkentamaan edellistä funktiota  $\psi_{alb}(\gamma)$ , voitaisiin sinc -funktion sisällä olevan kertoimen 0,8 paikalle sijoittaa sopiva funktio, joka saisi arvon 0,8, kun  $\gamma$  lähestyy arvoa  $\pm\pi$  ja muulloin sen arvo ei olisi yhtä suuri.

Tässä empiirisessä kaavassa on oletettu, että maapallon lämpötila on suoraan



verrannollinen etäisyyteen Auringosta. Todellisuudessa tämä on aika karkea arvio ja siten rakennettu malli ei toimi kovin hyvin. Lisäksi saattaa olla, että albedon tuottama radansuuntainen kiihtyvyys on merkittävämpi tekijä ennustustarkkuuden kannalta. Albedon tuottamaa radansuuntaista kiihtyvyyttä ei tässä työssä tutkittu, mutta sen pitäisi tuottaa myös suuruusluokassa  $10^{-10} \frac{m}{s^2}$  oleva kiihtyvyys [32]. On myös mahdollista, että säteilypaineparametrit pitäisi kalibroida uudelleen albedo-voiman käyttöönoton jälkeen, mutta tätäkään ei testattu työn tekemisen aikana.

### 3.5 Antennin säteilyn työntövoima

Navigointisatelliitti lähettää koko ajan navigointidataa radioyhteydellä. Jos käytetään suuntaavaa antennia, fotonit lähtevät satelliitista enimmäkseen kohti maapalloa. Vaikka tämä teho ei ole kovin huomattava, aiheuttaa se silti pienen nettotyöntövoiman, sillä jokaisella fotonilla on tietty liikemäärä, joka riippuu fotonin taajuudesta kaavan (2.7) osoittamalla tavalla. Oletetaan seuraavaksi, että satelliitin lähettämä radioteho on  $P$ . Nettotyöntövoima on kaavan (3.10) osoittamalla tavalla laskettavissa. Kaavanjohto

$$\mathbf{a}_{radio} = \frac{\mathbf{F}}{m} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \cdot \frac{1}{m} = \frac{hf}{mc} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta t} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{hf}{mc} \cdot \frac{P}{hf} \cdot \mathbf{e}_r = \frac{P}{mc} \cdot \mathbf{e}_r \quad (3.10)$$

osoittaa, että vaikka GPS satelliitti lähettäisi useampia taajuuksia kohti maapalloa, se ei vaikuta voiman suuruuteen. Tässä  $N$  edustaa lähetettyjen fotonien määrää aikavälillä  $t$ .  $\mathbf{F}$  on antennin säteilyn voimavektori ja  $m$  on satelliitin massa. Liikemäärä  $\mathbf{p}$  edustaa lähetettyjen radiofotonien liikemäärää. Muut luonnonvakiot on merkattu normaalisti:  $h$  on Planckin vakio ja  $c$  on valonnopeus. Parametri  $f$  on fotonin taajuus. Syntyneen työntövoiman suunta on maapallosta poispäin, joten suunta voidaan helposti määrittää kertomalla skalaarina laskettu voima yksikkövektorilla  $\mathbf{e}_r$ , joka edustaa satelliitin normalisoitua suuntavektoria maapalloseskeisessä koordinaatistossa.

Koska antennin työntövoima on samansuuntainen maapallolta tulevan säteilypaineen kanssa, tulee olla hyvin tarkka kalibroitien suhteen. Se miten hyvin antennin työntövoimakorjaus toimii, on ehdottomasti riippuvainen sekä maapallon säteilypaineen korjauksen toimivuudesta, että suhteellisuusteoriakorjauksen käytöstä.

### 3.6 Auringon säteilypaine

Säteilypainemallimme huomioi suoraan Auringosta tulevan voiman ja  $y$ -bias -termin suuntaan olevan voiman.  $Y$ -bias -suuntainen voima muodostuu pääasiallisesti satelliitin heijastamasta säteilystä [11]. Mallimme olettaa, että satelliitin pinta-ala pysyy

vakiona ja aurinkopaneelit ovat aina kohdistettuja Aurinkoon päin. Aurinkopaneelit kyllä kohdistetaan mahdollisimman hyvin kohti Aurinkoa, mutta laatikko, jossa antennit sijaitsevat, pyritään suuntaamaan kohti maapalloa. Tästä johtuen kyseinen satelliitin laatikko-osa pyörii Aurinkoon nähden. Tämä pyöriminen puolestaan muuttaa satelliitin pinta-alaa, joka absorboi ja heijastaa Auringon lähettämää säteilyä.

Tässä tutkimuksessa kokeiltiin mallintaa pinta-alan muuttumista seuraavalla yksinkertaisella kaavalla, joka riippuu Auringon ja maapallon välisestä kulmasta  $\gamma \in [0, \pi]$ , kun tarkastelija on satelliitin sijainnissa. Pinta-alan riippuvuuden approksiimaatioksi löydettiin kokeilemalla empiirinen kaava

$$A_{\text{korjattu}} = A_{\text{sat}} + \alpha_3 \cdot (\sin(|\gamma|) - 0,5), \quad (3.11)$$

jossa parametri  $\alpha_3$  on siis säteilypainemallin kolmas termi, joka voidaan approksimoida jokaiselle satelliitille erikseen. Ajankäytön puitteissa tässä työssä ei muodostettu erillistä parametrin määrittämisohjelmaa. Parametrin huomattiin olevan satelliitista riippuen joko 0,16 tai -0,16, rataennusteita satelliiteille kokeillen erilaisia parametrin arvoja. Lisäksi joillekin satelliiteille tämä korjaus oli hyvin pieni, lähes merkityksetön, jolloin se voidaan approksimoida nolllaksi.

Vaikka myöhemmin tässä tutkimuksessa kutsumme usein tätä korjausta box-wing SRP -korjaukseksi, emme käyttäneet mitään valmista box-wing mallia. Tämä ratkaisu kuitenkin muistuttaa etäisesti joidenkin box-wing säteilypainemallien korjaustermiä pyörivän teknisen laatikon absorptiokertoimelle [33].

Jos säteilypainemallia halutaan edelleen tarkentaa, saattaisi olla järkevintä siirtyä säteilypaineen laskemisessa CODE-malliksi kutsuttuun ratkaisuun [11], jo toimivaksi todettuun valmiiseen box-wing malliin tai muuhun ennestään käytössä olevaan yleiseen ratkaisuun. Tällaisten mallien empiiristen parametrien kalibrointi on kuitenkin haastava tehtävä. Jos tarkempaa säteilypainemallia joskus tarvitaan, niin ennustusmallin muutosten tekemiseen tulee varata riittävästi aikaa.

Näiden parametrien approksimointia voisi kuvailla epälineaarisen tilamallin parametrien estimointiongelman. Alkuperäinen säteilypainemallimme käytti parametrien estimointiin laajennettua Kalmanin suodinta. Tämänkaltaisten ongelmien ratkaisemiseen on paljon valmiita menetelmiä, joita voi hyödyntää. Esimerkiksi Särkän kirjassa [37] on esitelty monia hyviä menetelmiä. Pääpiirteissään menetelmät parametrien estimointiin liittyvät diskreettiaikaisiin järjestelmiin. Rataennustusalgoritmi on voimamallin kanssa jatkuva-aikainen ”järjestelmä”, mutta se voidaan diskretisoida ja sen jälkeen pystytään käyttämään edellä mainittuja menetelmiä. On myös olemassa joitakin jatkuva-aikaisille järjestelmille tarkoitettuja parametrien estimointialgoritmeja, mutta ne ovat monimutkaisempia ja haastavampia käyttää.

Yksinkertaisin tapa lähteä arvioimaan CODE-mallin parametreja olisi tehdä tilastollisesti merkittävä määrä lyhyitä (esim. 15 minuutin) ennusteita precise ephemeriksen paikkatietojen pohjalta ja tämän jälkeen tutkia mihin satelliitti ajautuu milläkin ajanhetkellä. Ajanhetket taas voidaan kytkeä Auringon, Maan ja satelliittien sijaintien kanssa siihen, miten parametrit pitää kalibroida oikeanlaisten säteilypainevoimien huomioon ottamiseksi. Tätä kautta voisi myös rakentaa oman säteilypainemallin, joka toimisi kenties vielä paremmin käytössä olevan voimamallin kanssa.

Voitaisiin esimerkiksi tutkia graafisesti ylimääraisten voimien suuruuksia RTN suuntiin (lyhyiden rataennusteiden tilastollisesta datasta) ja katsoa millaisia riippuvuuksia löytyy Auringon ja satelliitin sijaintien suhteen. Samoin kannattaisi tutkia löydettyjen voimien aikariippuvuuksia (esimerkiksi  $\alpha_1$  -parametrille löytyy selvä puolen vuoden sykleissä tapahtuva vaihtelu lähes kaikille GPS satelliiteille). Näin voitaisiin periaatteessa ottaa myös huomioon maapallon albedoa empiirisin keinoin. Mikäli omaa säteilypainemallia aletaan tehdä, tulee kuitenkin tarkastella useiden kalenterivuosien pituista aikaa, että voidaan varmistua korjausparametrien toimivuudesta myös tulevaisuudessa. Laskennallisesti tämä menetelmä ei varmasti olisi kevyin mahdollinen.

Todennäköisin tapa saada parannettua rataennusteita lisää olisi muodostaa tarkempi säteilypainemalli. Tätä vihjaa jo luvun yksinkertainen box-wing säteilypainemallin testi, joka osoittautui toimivaksi. Päädyttiinpä millaiseen uuteen säteilypainemalliin tahansa, sen tulisi keskittyä ottamaan huomioon ne suurimmat voimatermit, mitä nykyinen säteilypainemallimme ei huomioi. Näihin suurimpiin säteilypainevoimiin sisältyvät maapallon albedo [32,38], satelliitin eri suuntiin emittoima infrapunasäteily [1] ja satelliitin pintojen eri suuntiin heijastama auringonvalo [33]. Satelliitin lähettämän infrapunasäteilyn tuottama voima on todennäköisesti tärkeässä roolissa niillä hetkillä, kun satelliitti kulkee maapallon varjon läpi. Silloin satelliitti jäähtyy ja lämpenee liikkuessaan radallaan ja sen lähettämän infrapunasäteilyn määrä riippuu lämpötilan neljännessä potenssista Stefan-BolzmANNIN lain mukaisesti [10].

Käytännössä määräämättömästi säteilypainemallin tarkkuutta ei kuitenkaan voida nostaa, sillä satelliitin asennossa on aina pientä satunnaisuutta [24] ja siten myös auringonvaloa heijastuu satunnaisesti suuntiin tuottaen voimatermejä, joita on lähes mahdoton ennustaa.

## 4. MUITA HYVIN PIENIÄ KORJAUKSIA

Tässä kappaleessa on tarkasteltu useampia pieniä puutteita nykyisessä voimamallissa, joita ei välttämättä tarvitse korjata näiden virheiden pienen suuruusluokan vuoksi. Loppukäyttäjän kannalta ei myöskään ole mielekästä, jos laskenta-aika nousee paljon, vaikka ennusteen tarkkuus pysyy samalla tasolla. Voimien suuruutta on arvioitu tarkennetulla voimamallilla, ellei toisin ole mainittu.

### 4.1 Suhteellisuusteoriakorjaus Auringon gravitaatiolle

Koska käytämme rataennusteiden laskemiseen maapallokeskeistä inertiaalikoordinaatistoa, ei Auringon gravitaation suhteellisuusteoriakorjaus näy merkittävän suuren virhetekijänä (maapallo kiertää Aurinkoa noin nopeudella 30 km/s). Toisaalta GPS satelliitti kiertää maapalloa noin 3km/s, joten itse satelliitin kiertonopeus Aurinkoon nähden vaihtelee sen radan mukaan. Jos pitäisi saada aikaan erittäin tarkkoja rataennusteita, pitäisi tuon muuttuvan nopeuden funktiona laskea suhteellisuusteoriakorjaus myös Auringon gravitaatiolle ja muuttaa se maapallon inertiaalikoordinaatistoon, jotta voitaisiin laskea oikea Auringon häiriöpotentiaali satelliittiin nähden. Koska Auringon aiheuttama gravitaatiokiihtyvyys on melko pieni maapallon gravitaatioon nähden ( $<1/100$ ), ei korjauskaan olisi erityisen merkittävä.

Tyypillisesti voitaisiin arvioida, että Auringon gravitaation suhteellisuusteoriakorjauksen vaikutus satelliittiin kohdistuvaan kokonaisvoimaan olisi alle  $1/5$  maapallon gravitaatiokorjauksen vaikutuksesta. Toisaalta Auringon suhteellisuusteoriakorjaus on miltei aina ajasta riippuva ja saattaisi hieman siten vähentää virhetermien oskilloimista. Todennäköisesti ei kuitenkaan merkittävästi. Esimerkkinä laskeaan lausekkeessa (4.1) Auringon gravitaatiokiihtyvyyden korjauksen suuruus maapallokeskeisessä koordinaatistossa, kun satelliitti liikkuu maapallon kanssa samaan suuntaan (kiertää siis Aurinkoa noin 3km/s maapalloa nopeammin). Lukuarvo

$$\Delta \mathbf{a}_{g,Aurinko} \approx 3,7 \cdot 10^{-11} \frac{m}{s^2} \quad (4.1)$$

kertoo miten paljon Auringon suhteellisuusteoriakorjaus vaikuttaa enimmillään. GPS satelliitille tämä on noin  $1/5$  maapallon gravitaation suhteellisuusteoriakorjauksen ( $1,7 \cdot 10^{-10} \frac{m}{s^2}$ ) suuruudesta. Yleensä Auringon suhteellisuusteoriakorjauksella on kuitenkin huomattavasti pienempi vaikutus. Kun satelliitti kiertää maapalloa, se kiertää Aurinkoa välillä maapalloa hitaammin ja välillä nopeammin, riippuen kiertora-

dan muodosta. Tällöin Auringon suhteellisuusteoriakorjaus on karkeasti arvioituna ajasta sini-/kosiniriippuva termi, jonka jakso on noin 12h (11h 58min). Korjauksen amplitudi on maksimissaan lausekkeessa (4.1) näkyvillä. Kannattaa huomata, että kokonaisuudessaan Auringon gravitaation suhteellisuusteoriakorjaus on paljon suurempi ( $2,2 \cdot 10^{-10} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ ), mutta säteilypainemallimme ottaa maapallon liikkeestä johdettavan osuuden lähes täydellisesti huomioon. Se kattaa koko korjauksesta siis noin 95%.

Kuun gravitaatiolle vastaavaa korjausta ei kannata edes miettiä, sillä Kuun gravitaatiokiihtyvyys maapallon lähiympäristössä on voimakkuudeltaan samaa suuruusluokkaa, kuin Auringon gravitaatio ja satelliitti liikkuu Kuuhun nähden paljon pienemmällä nopeudella, kuin maapalloseskeinen koordinaatisto Aurinkoon nähden. Suuruusluokaltaan suhteellisuuskorjaus olisi Kuun gravitaatiolle maksimissaan noin  $5 \cdot 10^{-14} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Kaikki approksimoidut lukuarvot on saatu käyttämällä kaavaa (3.7), jossa nopeus on muutettu satelliitin nopeudeksi aurinkokeskeisessä koordinaatistossa, massaksi on asetettu Auringon massa ja etäisyydeksi  $r$  etäisyys Auringosta. Tässä on tehty siis jälleen oletus, että satelliitti ja maapallo kiertävät Aurinkoa ympyräradalla.

## 4.2 Gravitaation vaikutus kellon käyntinopeuteen

Satelliitin kellon käyntinopeus ei suoranaisesti liity rataennusteisiimme, mutta jos haluamme lopulta tehdä loppukäyttäjän paikka-arvion satelliitin sijainnin ja kellon perusteella, mahdollinen kellovirhe vaikuttaa tuloksiin. Gravitaatio kaareuttaa neliulotteista aika-avaruutta, jolloin kiihtyvässä liikkeessä olevat kellot käyvät hitaammin, kuin paikallaan pysyvät kellot. Tässä kannattaa huomioda, että maapallon pinnalla oleva kello, joka näyttää pysyvän paikallaan, on oikeasti kiihtyvässä liikkeessä, joka aiheutuu maapallon gravitaatiokentästä. Käytännössä maapallon gravitaatiokenttä on onneksi kuitenkin niin heikko, ettei meidän tarvitse laskea kellon käyntinopeuksia satelliiteille erikseen näin pienien aikavälien rataennusteille. Lisäksi esimerkiksi GPS järjestelmä ottaa tämän kellon käyntinopeusvirheen jo huomioon lähettämällä korjausparametrit vastaanottimille satelliittien radiolähetysten mukana.

Kuten todettiin, kiihtyvässä liikkeessä olevan tarkastelijan kello käy eri nopeudella, kuin paikallaan olevan tarkastelijan kello. Myös tasainen liike kaareuttaa aika-avaruutta, jolloin liikkuvan tarkastelijan kello alkaa käydä hitaammin, kuin paikallaan olevan. Vastaavanlaisesti satelliitin kellon käyntinopeus ei ole vakio, sillä satelliitin nopeus maapallolla olevan tarkastelijan koordinaatistossa vaihtelee. Nopeudet satelliittiradoilla ovat kuitenkin tyypillisesti hyvin pieniä verrattuna valonnopeuteen ja nopeus ei vaihtelee merkittävän paljoa ympyräradoilla, joten tämäkään tarkennus ei ole fysikaalisesti ajateltuna tarpeen (ainakaan nykyisien virherajojen puitteissa).

### 4.3 Säteilyn ja gravitaation nopeus on valonnopeus

Koska sähkömagneettinen säteily liikkuu valonnopeudella, se ei ole perillä heti lähtönsä jälkeen. Aurinko on noin yhden astronomisen yksikön eli keskimäärin 8 valominuutin päässä maapallosta. Aurinko ei ole paikallaan oleva kappale, vaan myös se kiertää omalla radallaan aurinkokuntamme gravitaatiokeskipistettä. Siispä säteily, mikä lähtee Auringosta ei tule maapallolle siitä suunnasta, missä Aurinko säteilyn saapumishetkellä on, vaan siitä, missä Aurinko oli noin 8 minuuttia sitten. Myös gravitaatio liikkuu valonnopeudella. Siispä maapallon etäisyydellä Auringon veto voima vetää kohti sitä pistettä, missä Aurinko olisi, jos se ei olisi ollut kiihtyvässä liikkeessä edellisten 8 minuutin aikana. Tässä kiihtyvällä liikkeellä tarkoitetaan Auringon kiihtyvää liikettä, josta on vähennetty se kiihtyvä liike, mikä vaikuttaa myös maapalloon (eli käytännössä tähän jää se kiihtyvä liike, joka aiheutuu maapallon ja Auringon paikkojen eroista ja siten planeettojen gravitaatiokenttien eroista).

Koska Aurinko liikkuu kuitenkin aurinkokuntamme massakeskuksen ympäri hyvin hitaasti, voimme unohtaa kaksi edellistä pientä korjausta. Tilanne olisi eri, jos Aurinko liikkuisi nopeammin. Tämän työn puitteissa tehdyt testit vahvistivat hypoteesin, 7 päivän satelliitin paikkaennuste ei muuttunut edes 1 millimetriä verrattuna oletukseen, että säteily lähtee Auringon sen hetkisestä sijainnista. Gravitaation lähtösijainnin korjausta allekirjoittanut ei edes yrittänyt testata (eihän gravitaatioaaltoja ole vielä kokeellisesti edes kyetty havaitsemaan).

### 4.4 Satelliitin liikkeen vaikutus Auringon säteilypaineeseen

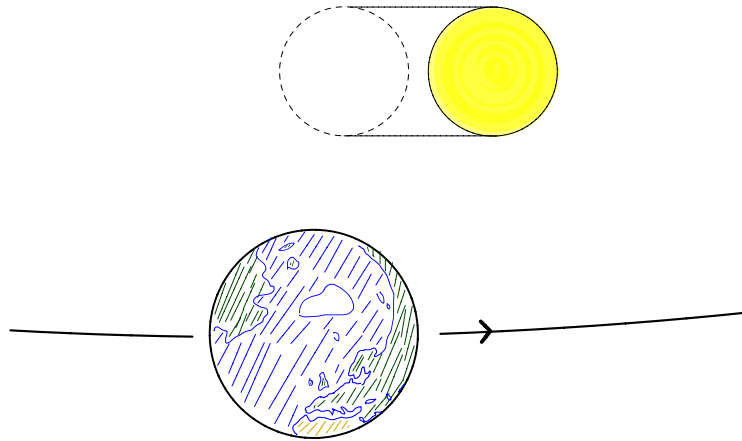
Kun satelliitti liikkuu Auringon koordinaatistossa, se kokee sähkömagneettisen säteilyn osuvan siihen eri suunnasta tai erilaisella taajuudella, kuin levossa oleva tarkkailija. Siispä jos pitäisi tehdä erityisen tarkkoja rataennusteita, pitäisi ottaa huomioon, että Auringon säteilypaineen tulosuunta ei välttämättä ole täsmällisesti se, missä Aurinko oli noin 8 minuuttia sitten.

Tarkalleen ottaenhan satelliitti liikkuu ja tällöin liikkuva satelliitti kokee osuvansa edestään tuleviin aaltoihin eri taajuudella, kuin takaansa tuleviin. Tässä on kyse puna- ja sinisiirtymästä. Punaisen valon fotoneilla on pienempi liikemäärä, kuin sinisen valon, joten säteilypaineen aiheuttama voima ei pysy vakiona. Jos esimerkiksi arvioidaan, että satelliitti liikkuu poispäin Auringosta  $3\frac{km}{s}$  ja Auringon säteilypaineen suuruus on  $10^{-7}\frac{m}{s^2}$ , punasiirtymän tuottama kiihtyvyyden muutos olisi Auringon säteilypaineen osalta luokkaa  $10^{-12}\frac{m}{s^2}$ . Kun satelliitti liikkuu suoraan kohti Aurinkoa tai siitä poispäin, punasiirtymän tuottamaa lisävoimaa voidaan arvioida kaavalla (4.2). Kannattaa huomioda, että kaava toimii vain pienillä nopeuksilla ( $v \ll c$ ), jolloin nopeus aiheuttaa lineaarisen muutoksen voimaan. Approksimaatio toimii hyvin kaikille maapalloa kiertäville satelliiteille (joiden nopeus on selvästi alle

valonnopeus). Kiihtyvyyden korjaus

$$\mathbf{a}_{\text{punasiirtymä}} \approx \pm \mathbf{a}_{\text{srp, suora}} \left( 1 - \sqrt{\frac{1 + \frac{|\mathbf{v}_{\text{sat}}|}{c}}{1 - \frac{|\mathbf{v}_{\text{sat}}|}{c}}} \right) \quad (4.2)$$

ei ole merkittävä, mutta silti havaittavissa oleva. Edellä mainitussa kaavassa  $\mathbf{v}_{\text{sat}}$  edustaa satelliitin nopeutta kohti Aurinkoa tai siitä poispäin.



Kuva 4.1: Maapallon liikkeestä johtuva näennäinen auringonvalon tulosuunnan muutos. Ilmiötä havainnollistettu korostamalla vaikutusta.

Jos taas Auringon säteilypaine osuukin satelliittiin sen liikesuuntaan nähden sivulta, säteilypaineen aallot näyttäivät osuvan satelliittiin ennemminkin vinosti sen liikesuunnan ja Auringon suunnan välistä. Tätä havainnollistaa kuva 4.1. Kuvassa maapallo liikkuu kohti kuvan oikeaa reunaa. Aurinko taas sijaitsee suoraan ylhäällä päin. Koska maapallo liikkuu, maapallon koordinaatistossa näyttää siltä, että valo tulee eri suunnasta, kuin missä Aurinko oikeasti on. Tätä ilmiötä kutsutaan valon aberraatioksi. [15]

Säteilypaineen tulosuuntaan pitäisi siis tehdä pieni korjaus. Toisaalta satelliitin nopeus on melko pieni, eikä maapallokaan kulje Auringon ympäri kuin vain noin  $30 \frac{\text{km}}{\text{s}}$  ( $\approx \frac{1}{10000}$  valonnopeudesta), joten korjaus ei ole kovin merkittävä (varsinkaan, kun rataennusteita lasketaan maapallokeskeisessä inertiaalikoordinaatistossa). Jos voimaa haluaa fysikaalisesti arvioida, päädytään  $10^{-11} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$  suuruusluokkaan, eli vaikutus on noin kymmenkertainen puna ja sinisiirtymään nähden. Kiihtyvyyden vaikutusta korostaa se, että voima pysyy inertiaalikoordinaatistossa lähes samansuuntaisena koko ajan. Yhden päivän ennusteeseen voisi näin ollen arvioida tulevan virhettä tästä voimasta korkeintaan noin 5 senttimetriä. Tosin tämä satelliittiin vaikuttava

voima ei poikkeustilanteita lukuun ottamatta pysy samansuuntaisena RTN koordinaatistossa ja siten todennäköinen vaikutus on paljon pienempi. Voiman tuottaman kiihtyvyyden maksimin arvioinnin kaavan

$$\mathbf{a}_{\text{valon tulosuunnan muutos}} \approx -|\mathbf{a}_{\text{srp,suora}}| \tan\left(\frac{|\mathbf{v}_{\text{sat}}|}{c}\right) \frac{\mathbf{v}_{\text{sat}}}{|\mathbf{v}_{\text{sat}}|} \quad (4.3)$$

laskemiseen vaaditaan, että käytetään aurinkokeskeistä koordinaatistoa. Tässä satelliitin nopeus  $\mathbf{v}_{\text{sat}}$  edustaa siis satelliitin nopeutta aurinkokeskeisessä koordinaatistossa silloin kun satelliitti liikkuu samaan suuntaan maapallon kanssa ja vastaavasti kiihtyvyys  $\mathbf{a}_{\text{valon tulosuunnan muutos}}$  saadaan samassa aurinkokeskeisessä koordinaatistossa. Tämän kiihtyvyyden voidaan arvioida kohdistuvan aina vastakkaiseen suuntaan maapallon liikkeeseen nähden (aurinkokeskeisessä koordinaatistossa), kun taas sini- ja punasiirtymä ovat satelliitin radasta riippuvia, ajan suhteen sinimuotoisia voimatermejä. Allekirjoittanut ei aluksi edes huomannut valon tulosuunnan muuttumista satelliitin nopeuden funktiona, mutta toiselle tutkijaryhmän jäsenelle, Xiaolong Zhangille, tämä tuli mieleen virhelähteitä pohdittaessa. Tässä tutkimuksessa ei tehty tilastollista tarkastelua valon tulosuunnan muutoksen korjaukselle, mutta jos rataennusteiden tarkkuutta pitää saada kasvatettua myöhemmin, olisi järkevää myös kokeilla tämän korjauksen käyttöönottoa.

## 4.5 Auringon säteilypaineen muutokset ajan suhteen

Nykyinen ennustusmallimme ottaa jo huomioon sen, että Auringon säteilypaine muuttuu maapallon ollessa radallaan lähempänä Aurinkoa tai kauempana siitä. Tämä on toteutettu yksinkertaisella säteilypaineen  $1/r^2$  -riippuvuudella. Tässä ei kuitenkaan huomioida sitä, että Aurinko ei ole pistemäinen säteilylähde. Käytännössä Aurinko näyttää suuremmalta, kun sitä katsotaan lähempää ja pienemmältä, kun sitä katsotaan kauempaa. Toisaalta suurimman osan tuosta vaikutuksesta kumoo pois se, että säteily tulee laajemmalla avaruuskulmalta, kun satelliitti on lähempänä Aurinkoa. Tällöinhän fotonien tuoma nettoimpulssi satelliitille aikaa kohti on pienempi, kuin jos kaikki fotonit saapuisivat samasta suunnasta. Kuitenkin erittäin tarkkoissa rataennusteissa tämä tulisi ottaa huomioon.

Auringon säteilypaine muuttuu myös Auringon aktiivisuuden mukaan. Auringon aktiivisuus kuitenkin vaihtelee paljon lyhilläkin aikaväleillä ja sen ennustaminen täsmällisesti on vaikeaa. Tällä hetkellä säteilypainemalli on arvioitu jonkin tietyn ajanjakson säteilypaineen mediaanin avulla ja Auringon säteilypaineen mahdollista hidasta muuttumista ei ole huomioitu mitenkään. Toisaalta kun säteilypaineparametrit  $\alpha_1$  ja  $\alpha_2$  arvioidaan usein uudelleen, Auringon säteilypaineen voimakkuuden muuttumista ei tarvitse huomioida sen tarkemmin.



## 5. GNSS PAIKANNUSJÄRJESTELMÄT

Tällä hetkellä toiminnassa on kolme erilaista satelliittipaikannusjärjestelmää: GPS, GLONASS ja Beidou. Lisäksi Eurooppalainen Galileo -järjestelmä otetaan myös pian käyttöön, kunhan järjestelmän tekninen puoli saadaan valmiiksi. Tällä hetkellä Galileon paikannustarkkuutta ei ole vielä saatu toivotulle tasolle. Lisäksi Beidou ei kata vielä koko maapallon pintaa, vaan toimii täydellisesti ainoastaan Kiinassa ja sen lähialueilla. Onkin käytännöllistä seuraavaksi tutustua jokaiseen paikannusjärjestelmään ja ottaa selvää millä tarkkuudella peruskäyttäjä saa paikkansa määritettyä eri järjestelmien avulla. Satelliittien sijaintien määritysmenetelmät on myös hyvä tietää. Ilman satelliittien tarkkoja sijaintitietoja emme voisi ennustaa niiden tulevia ratojakaan.

### 5.1 GPS - *Global Positioning System*

GPS järjestelmä koostuu tällä hetkellä 32 satelliitista ja Maan pinnalla olevista tarkkailuasemista, jotka määrittävät satelliittien tarkat sijainnit ja nopeudet. GPS satelliitit kiertävät maapalloa noin 20 200 km korkeudella lähes ympyräkiertoradoilla, siis kaksi ne kiertävät maapallon noin 2 kertaa vuorokaudessa. GPS järjestelmä lähettää kahta eri signaalia, siviilikäyttöön tarkoitettua ja salattua sotilaskäyttöön tarkoitettua. Uudemmat satelliitit GPS satelliitit lähettävät useampia signaaleja, sillä näiden avulla voidaan parantaa paikannustarkkuutta. Yksi siviilikäyttöön suunnattu signaali antaa paikannustarkkuudeksi yleensä alle 10 metriä, kun taas sotilaskäyttöön tarkoitettu signaali pienentää virhettä tuntuvasti (alle 5 metrin luokkaan) [41]. Virhekorjaus perustuu siihen, että sotilaskäytön signaali lähetetään eri taajuudella ja siten signaalien saapumisaikojen eroista voidaan tehdä ilmakehän virheen korjaus. Uudet siviilikäyttöön suunnatut paikannussignaalit auttavat tarkkuuteen täsmälleen samoin menetelmin. Satelliittien lähettämä data määritetään maanpinnalla, pääkontrolliasemalla Colorado Springsissä. Satelliittien tarkkailuasemat omistavat osin Yhdysvaltojen ilmavoimat ja osin Yhdysvaltojen National Geospatial-Intelligence Agency (NGA). Suunniteltua satelliittien toiminta-aikaa pyritään myös kasvattamaan, jolloin pitkällä aikavälillä järjestelmän ylläpito käy halvemmaksi. [42]

Paikannustarkkuutta voidaan nostaa myös toisilla menetelmillä. Voidaan esimerkiksi käyttää differentiaalisia GPS vastaanottimia. Tällöin ilmakehän tuottama aikavirhe vastaanottimen signaalimittauksissa voidaan poistaa pääosin. Nyt paikannus-

tarkkuudessa ei enää ole kuin noin 1 metri virhettä. Menetelmä perustuu sellaisten asemien käyttöön, jotka tietävät sijaintinsa ja voivat tätä kautta tehdä ilmakehävirheen arvion omien GPS signaalimittaustensa mukaisesti. Tällaiset asemat lähettävät korjaussignaalia lähialueille ja siten paikannustarkkuutta voidaan nostaa lähellä olevissa GPS vastaanottimissa, jotka osaavat ottaa tämän korjaussignaalin huomioon. Useissa tapauksissa tuo korjausdata ei tule erillisenä radiosignaalina, vaan se voidaan ladata internetistä, sillä nykyään yhä useammilla laitteilla on yhteys internetiin. [29]

Joskus pitää saada äärimmäisen tarkka paikkatieto (esimerkiksi maanmittaustehtävissä). Tällöin käytetään useasti GPS vastaanotinta, joka lukkiutuu satelliittien kantoaaltojen vaiheeseen ja mittaa signaaleja pidemmän aikaa. Kun tämä signaalien mittaustarkkuus yhdistetään toiseen satelliittien kantoaaltoihin lukkiutuvaan vastaanottimeen, jonka sijainti tunnetaan tarkasti, voidaan useimmat virhetermit poistaa paikkamäärityksestä. Jäljelle jäävä virhe koostuu pääasiassa kokonaan broadcast ephemeriksen epätarkkuuksista ja tällöin voidaan olettaa paikka-arvion olevan oikea noin 5 cm tarkkuudella (kunhan tunnetussa paikassa olevan vastaanottimen sijainti ei ole kovin kaukana itse paikkaa määrittävästä vastaanottimeesta). [25]

## 5.2 GLONASS - *Globalnaya Navigatsionnaya Sputnikovaya Sistema*

Yhdysvaltalaisen GPS järjestelmän jälkeen ainoa maailmanlaajuinen satelliittipaikannusjärjestelmä on venäläinen GLONASS. Kyseinen järjestelmä kostui tutkimuksen kirjoittamishetkellä 24:stä satelliitista, jotka kiertävät maapalloa noin 19 100 km korkeudessa. Kuten GPS satelliititkin, ne pyritään pitämään hyvin ympyrämaisilla kiertoradoilla. Saattaa tosin olla, että joitakin tulevia GLONASS satelliitteja asetetaan erilaisille kiertoradoille. Satelliittien ratoja tarkkaillaan maa-asemilta (kuten kaikissa GNSS järjestelmissä) ja Venäjän on tarkoitus lisätä näiden asemien lukumäärää huomattavasti seuraavien vuosien aikana.

GLONASS -satelliittien paikannusvirhe on tällä hetkellä normaaleilla vastaanottimilla 20 metrin suuruusluokassa, eli järjestelmä on hieman epätarkempi kuin GPS [7]. Venäjällä on kuitenkin varattuna huomattava budjetti GLONASSin modernisointiin ja on oletettavissa, että järjestelmä saadaan tarkkuudeltaan GPS:n tasolle seuraavien 10 vuoden aikana. Tähän vaikuttavat sekä modernisoidut GLONASS-K satelliitit, että lisääntyvä satelliittien tarkkailuasemien määrä. Tulevat GLONASS satelliitit pyritään myös rakentamaan kestäviksi, jotta pitkän tähtäimen ylläpitokustannukset saataisiin painettua alaspäin.

Tässä työssä tutkitaan pääsääntöisesti ennustuksien tuottamaa SISRE -virhettä. Johdannossa kerrottiin jo GPS:n satelliittikonstellation keskimääräisen SISRE-virheen laskukaava. SISRE -virhe, eli satelliitin ennustetun pseudoetäisyysmittauksen

keskimääräinen keskihajonta, riippuu kuitenkin huomattavasti satelliittien radoista. Kaukana maapallosta (esimerkiksi geostationäärisellä radalla) olevat satelliitit saavat olla esimerkiksi 10 metriä sivusuuntaisesti väärässä sijainnissa, ennen kuin tuo virhe vastaisi 1 metrin virhettä sen etäisyydessä maapallosta. GLONASSin SISRE-virhe [13] voidaan määrittää RTN virheen kautta kaavalla

$$\sigma_{SISRE,GLONASS} = \sqrt{0,98\sigma_{\Delta R-c\Delta t}^2 + \frac{1}{45}(\sigma_{\Delta T}^2 + \sigma_{\Delta N}^2)}. \quad (5.1)$$

Tämä muistuttaa paljolti GPS:n SISRE -virheen laskukaavaa. Eron mitättömyys johtuu siitä, että GPS ja GLONASS -satelliitit ovat virheen laskemisen kannalta lähes samankaltaisilla radoilla, mutta eivät täsmälleen samanlaisilla.

### 5.3 Beidou - *Beidou Weixing Daohang Xitong*

Beidou eli Compass -satelliittipaikannusjärjestelmä on uusin käyttöön otettu järjestelmä. Teknisin puolin tämä on hyvin samankaltainen jo käytössä oleviin nähden, mutta järjestelmä ei vielä kata koko maapallon pintaa. Beidou on siinä mielessä ainutlaatuinen, että tässä satelliittipaikannusjärjestelmässä on ainoana asetettu satelliitteja sekä geostationäärisille, että elliptisille radoille. Tästä johtuen järjestelmän satelliittien SISRE -virhe lasketaan eri kaavalla geostationäärisellä ja elliptisillä radoilla oleville satelliiteille, kuin ympyräradalla oleville satelliiteille [36]. Seuraava kaava 5.2 esittää SISRE -virheen laskukaavan geostationäärisillä ja elliptisillä radoilla oleville Beidou -satelliiteille. Tuo laskukaava

$$\sigma_{SISRE,Beidou/GEO\&IGSO} = \sqrt{0,99\sigma_{\Delta R-c\Delta t}^2 + \frac{1}{127}(\sigma_{\Delta T}^2 + \sigma_{\Delta N}^2)} \quad (5.2)$$

toimii siis satelliiteille, joiden PRN:t ovat tutkimuksen kirjoittamisen hetkellä 1-10. Ja matalammilla ympyräkiertoradoilla oleville satelliiteille vastaava virhe on ilmoitettu kaavassa 5.3. Tuo kaava

$$\sigma_{SISRE,Beidou/MEO} = \sqrt{0,98\sigma_{\Delta R-c\Delta t}^2 + \frac{1}{54}(\sigma_{\Delta T}^2 + \sigma_{\Delta N}^2)} \quad (5.3)$$

on oikea satelliiteille, joiden PRN:t ovat tutkimuksen kirjoitushetkellä 11-14. Beidou järjestelmän loppukäyttäjän paikannustarkkuus on tällä hetkellä samaa luokkaa GLONASSin kanssa, eli noin 20 metriä Kiinan alueella [5]. Vaikka kyseinen satelliittipaikannusjärjestelmä ei kata vielä koko maapalloa, Kiina on sitoutunut seuraavien vuosien aikana lisäämään satelliittien määrän sille tasolle, että paikantaminen onnistuu kaikkialla luotettavasti. Samalla kun satelliittien määrää kasvatetaan, on tarkoitus lisätä maanpäällisten tarkkailuasemien määrää.

## 5.4 Satelliittien ratojen määrittäminen

GPS on yleisin satelliittipaikannusjärjestelmä, joten keskitytään ensin siihen. Koska GPS järjestelmän paikannustarkkuus perustuu satelliittien kellojen tarkkuuteen ja satelliittien täsmällisesti tunnettuihin koordinaatteihin, näiden koordinaattien selvittäminen tarkasti on äärimmäisen tärkeää. Tästä johtuen satelliittipaikannusjärjestelmään kuuluu useita eri puolille maapalloa sijoiteltuja tarkkailuasemia. Tarkkailuasemat vastaanottavat paikannussatelliittien lähettämää signaalia ja voivat tästä määrittää etäisyytensä kyseisiin satelliitteihin. Kun puolestaan tiedetään asemien tarkat sijainnit maapallolla ja niiden etäisyydet satelliitteihin, on helppo määrittää satelliittien sijainnit. Nopeudet voidaan määrittää miltei yhtä helposti.

Satelliittien sijainteja voidaan myös määrittää laserseurannan avulla. Uusimpiin kolmannen sukupolven GPS satelliitteihin on tarkoitus lisätä laserheijastimet, joiden avulla voidaan tehdä erilliset etäisyysmittaukset [20]. Tällöin mahdolliset almanakkadatan virheet eivät vaikuta seuranta-asemien mittauksiin, sillä normaalit satelliittien lähettämät signaalit generoidaan almanakkadatasta. Venäläisten GLONASS -järjestelmässä heijastimet ovat jo käytössä ja eurooppalaisten Galileo -järjestelmässä sellaisia on tarkoitus myös käyttää [23]. Laserheijastimia on asennettu myös joihinkin jo käytössä oleviin GPS satelliitteihin testejä varten.

Koska satelliittien kellot eivät ole täydellisiä, vastaanottimen tulee tietää jokaisen satelliitin kellovirhe. Tästä johtuen tarkkailuasemien mittauksista rakennetaan kontrolliasemalla jokaiselle GPS satelliitille oma datapaketti, jota kukin satelliitti lähettää maapalloa kohti, aina kerran 12,5 minuutin aikana. Tuossa datapaketissa on kerrottu kellovirhe, satelliitin ennustettu sijainti seuraavien 4h aikana ja muita tietoja, joita vastaanotin voi käyttää (esim. ilmakehäparametreja ja satelliitin kunnosta kertovaa tietoa).

Tuota satelliittien lähettämää datapakettia kutsutaan yleisesti *Broadcast Ephemeriksi*. Toisaalta kaikissa satelliittien rataennusteissa on epätarkkuutta ja jopa tarkempi arvio satelliitin todellisesta radasta voidaan määrittää vasta jälkikäteen suoritetuista mittauksista. Tällöinhän voidaan tehdä korjaus Broadcast Ephemeriksen arvioon. Kyseistä tarkempaa almanakkatietoa satelliitin radasta kutsutaan yleisesti *Precise Ephemeriksi*. Satelliittien almanakkadataa saa vapaasti ladattua internetistä esimerkiksi IGS:ltä, eli *International GNSS serviceltä* [18].

## 6. PARANNETUN VOIMAMALLIN VAIKUTUS RATAENNUSTEISIIN

Diplomityön päätarkoitus oli parantaa rataennustusten tarkkuutta tekemällä korjauksia voimamalliin. Allekirjoittanut kokeilikin monia erilaisia ratkaisuja virheen minimoimiseksi. Tässä kappaleessa esitetään mielenkiintoisimpien ja toimivimpien korjauksien vaikutukset rataennusteiden tarkkuuteen. Lisäksi on tarkoitus käsitellä lyhyesti voimamallin lisäysten tuottamaa laskennallista taakkaa. Koska GNSS satelliitteja on taivaalla kymmeniä, emme käsittele jokaista satelliittia erikseen tämän kappaleen yhteydessä. Liitteenä on työn lopussa kuitenkin useampia taulukkoja, joista voi vertailla satelliittien rataennusteiden tarkentumista eri voimamallin korjausten myötä.

Jos satelliitin koordinaatit ovat virheelliset, voimamallimme antaa virheellisen kiihtyvyyssarvion. Tämä johtuu siitä, että useimmat satelliittiin kohdistuvat voimat ovat paikkariippuvia. Siispä “ennustuksen virhevoimat” kasvavat, kun ennustettu satelliitin rata alkaa erota todellisuudesta. Toisin sanoen virhe kasvaa hiljalleen enemmän ja enemmän, kun sitä alkaa karttua. Tästä syystä uusien pienten voimamallin lisäysten toiminnan analysointiin kannattaa käyttää mahdollisimman tarkkaa satelliittien sijaintidataa, sillä tällöin myös ennustuksien tarkentuminen on selkeimmin nähtävissä. Precise ephemerikset ovat tyypillisesti tarkimpia käytettävissä olevia satelliittien sijaintitietoja, joten tässä työssä käytetään pääsääntöisesti vain niitä.

### 6.1 Laskettujen ennusteiden valintakriteerit

Huomionarvoista rataennusteiden parantamisen kannalta on se, että yksittäisten ennusteiden tarkentuminen tai heikkeneminen ei välttämättä kerro yhtään mitään yleisestä rataennusteiden laadun muutoksesta. Käytännössä satelliitteihin vaikuttaa niin moni voima, että korjauksien toimivuus alkaa näkyä systemaattisesti vasta kun voimamalliin lisätään useampia korjauksia. Tästä johtuen työssä on keskitytty tutkimaan pääsääntöisesti rataennusteiden tilastojen kvantiileja. Toisaalta tilastollinen tarkastelu vaatii huomattavia määriä rataennusteita. Tämän kappaleen tuloksiin kerättiin aineistoa noin 4 000 rataennustusvuoden verran. Tarkemmin kuvien piirtoon käytettyjen tilastojen laajuus voidaan nähdä taulukosta 6.1. Lisäksi muita rataennustustestejä tehtiin runsaasti. Mikäli haluaa arvioida laskentaan kuluneen sähkön määrää ja laskentaan jokainen käytetty tietokone käyttäisi 100 W sähkötehoa, niin

1000 rataennustusvuotta vaatisi suuruusluokaltaan noin 30 kWh sähköä. Suuren rataennustusmäärän laskeminen on selvästi laskennallisesti raskasta. Allekirjoittaneen kannattikin käyttää rataennusteiden laskemiseen yliopiston rinnakkaislaskentaan soveltuvaa järjestelmää, Tutgridiä. Järjestelmän käyttöönotto vaati tarkkaa perehtymistä dokumentaatioon ja avun kysymistä järjestelmän asiantuntijoilta, mutta ilman Tutgridiä ei tässä työssä olisi voitu tehdä yhtä kattavia tilastollisia arvioita.

Taulukko 6.1: Tilastojen kattavuus rataennustusvuosina. Tässä taulukossa on vain kuvien piirtoon käytetyt tilastot. Tutgridissä tehtiin laskentaa myös box-wing-SRP korjauksen kalibrointiin, planeettojen vaikutuksiin, eri EGM malleihin, vaihtoehtoisin solid tide malleihin, nutaatiotarkennukseen ja vaihtoehtoisten säteilypaineparametrien testaukseen. Lisäksi rataennusteita tehtiin eri menetelmin laskettujen alkunopeuksien vaikutukseen liittyen. Kaiken kaikkiaan rataennustusvuosia tehtiin työn ohessa mitä luultavimmin yli 10'000.

Järjestelmä	Tilasto (vuotta)
GPS	1812
GLONASS	1289
Beidou	732
YHTEENSÄ	3833

Ne voimamallin korjaukset, joiden toimivuutta tutkittiin, olivat: Kiinteän maankuoren vuorovaihteluiden vaikutus gravitaatiopotentiaaliin, suhteellisuusteoriakorjaus maapallon gravitaatiolle, yksinkertainen maapallon albedon ja antennin radio-signaalin työntövoiman huomioiminen ja DE202 ephemeriksen käyttö taivaankappaleiden sijaintien määrittämisiin. Lisäksi GPS satelliiteille kokeiltiin käyttää yksinkertaista mallia satelliittien teknisen laatikon pyörimisestä aurinkopaneeleihin nähden, jolloin satelliitin pinta-ala muuttuu Auringon ja Maan välisen kulman funktiona.

Laskettujen rataennusteiden pituudeksi valittiin 14 vuorokautta. Pidemmän aikavälin ennusteet alkavat erota satelliitin todellisesta radasta kymmeniä metrejä ja sen jälkeen pienet lisätyt korjaustermit eivät näy hyödyttävän kovin paljoa. Lisäksi jos satelliitin rataennusteen arvio on kymmeniä metrejä pielessä, ei sillä ole enää suurta käytännön hyötyä paikannussovelluksille, joiden vuoksi ylipäättään lähdimme laskemaan rataennusteita. GPS ja GLONASS ennusteet tehtiin kalenterivuoden 2012 ephemerisdatan perusteella. Allekirjoittanut ei käyttänyt tuoreinta satelliittien sijaintien ephemerisdataa, koska aivan uusia vastaavia tutkimuksia on hankalampi löytää vertailtavaksi. Toisaalta koska Beidou -järjestelmään on lisätty vuoden 2012 jälkeen vielä useita satelliitteja, päädyttiin Beidou -rataennusteiden ajankohdaksi ottamaan kalenterivuosi 2014. Tästä johtuen rataennusteiden laskeminen tosin hie-  
man viivästyi, sillä IERS:n eli International Earth Rotation Servicen ilmoittamat maapallon tarkat asentoparametrit eivät ole saatavilla kuin noin kuukauden viiveellä ja viimeiset tarvittavat parametrit saatiin käyttöön vasta tammikuussa. GPS satelliittien osalta tutkittiin vain niitä satelliitteja, jotka olivat käytössä koko vuoden

2012.

Nämä 14 vuorokautta pitkät rataennusteet valittiin kattamaan suurin piirtein yksi kalenterivuosi. Tarpeeksi kattavan tilastollisen aineiston arveltiin muodostuvan, kun valittiin tehtäväksi 350 ennustetta, joiden aloitusajankohta eroaa toisistaan yhden vuorokauden verran. Käytännössä siis tilastoa ei tehty kokonaisesta 365 päiväisestä kalenterivuodesta, vaan yhdestä 364:n päivän pituisesta jaksosta. Poikkeus tähän oli Beidou -järjestelmä, jolle ennusteita tehtiin vähemmän, johtuen Maan asentoparametrien loppumisesta ennen vuoden 2014 joulua. Beidoun rataennusteet kasattiin 341 erillisestä ennusteesta, joiden aloitusajankohdat erosivat toisistaan vastaavasti yhden vuorokauden. Näin ollen Beidoun tilastojen laskentajakso oli 355 päivän mittainen. Beidoun tilaston kattavuutta rajoitti lisäksi aukot satelliittien precise ephemeris datassa. Näitä aukkoja on toisilla satelliiteilla enemmän kuin toisilla.

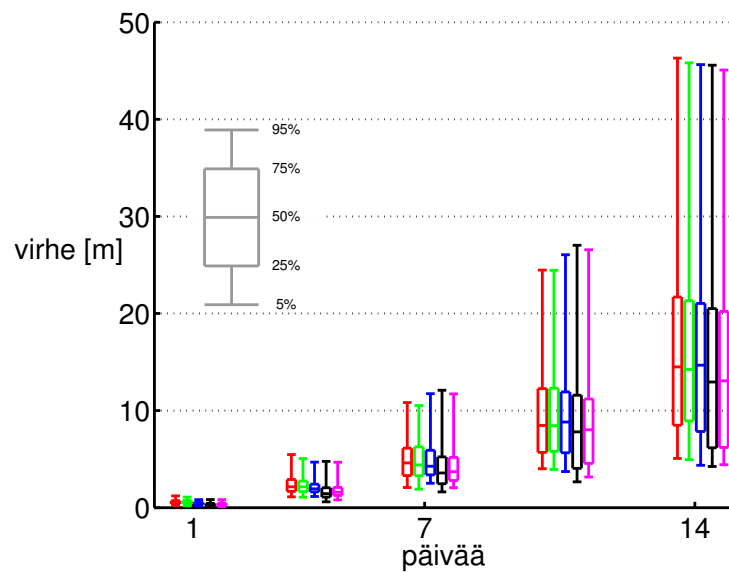
## 6.2 Ennusteet GPS satelliiteilla

GPS satelliittien sijainti- ja nopeustietoja on saatavilla monesta lähteestä. Tässä työssä GPS satelliittien sijaintitiedot on otettu yksinomaan Yhdysvaltojen NGAn eli National Geospatial-intelligence Agencyn precise ephemeriksestä [40]. Ephemeris antaa satelliittien koordinaatit niiden massakeskipisteiden mukaan, joten antennin sijainti ei vaikuta ennusteen tarkkuuteen, eikä antennikorjausta tarvitse tehdä koordinaateille (verrattuna broadcast ephemerikseen, jossa annetut koordinaatit ovat antennien koordinaatteja). Valinta kyseisen ephemeriksen käytöstä oli selkeä, sillä tuo precise ephemeris tarjoaa myös satelliittien nopeustiedot paikkatietojen lisäksi. Tällöin ei tarvitse kuluttaa ylimääräistä laskenta-aikaa satelliittien alkunopeuksien määrittämiseen.

Ennustuksilla on tarkoitus tutkia voimamallin korjausten toimivuutta. Koska tiedämme, että voimamalliin lisätyt korjaustermit ovat todella pieniä, ne eivät voi muuttaa rataennusteita kovin paljoa. Käytännössä rataennustusten toimivuuden näkee siis parhaiten, kun tutkii lyhyitä rataennustuksia, joiden alkunopeudet ja paikat ovat mahdollisimman tarkkoja. Lisäksi kannattaa valita tutkittavaksi sellaisia satelliitteja, joille säteilypainemallimme toimii hyvin. Jos valitsemme satelliitteja, joille säteilypainemalli toimii huonosti, näemme 2 viikon ennustusten tuottavan kymmenien metrien virheen. Voimamallin korjaukset (kiihtyvyydet suuruusluokaltaan  $10^{-10} \frac{m}{s^2}$ ) eivät puolestaan pysty korjaamaan ennustetta kuin muutamia metrejä, ellei kiihtyvyyden suunta satu olemaan sopivaan suuntaan ja sopivasti aikariippuva (Vrt.  $\mathbf{a}_{srp,y-bias}$  ja kiinteän vuoromaan vaihteluiden korjaus. Näistä jälkimmäisen vaikutus on minimaallinen, kun taas edellisen vaikutus on huomattavasti suurempi, vaikka suuruusluokka on molemmilla kiihtyvyyksillä sama). Huomaamme, että tässä työssä tutkitut korjaukset hukkuvat lähes täysin ennustuksen virheen sekaan. Toisaalta, jos valitsemme tutkittavaksi satelliitteja, joille säteilypainemalli toimii hyvin,

voimme olettaa, että ennustuksen tarkkuus on vielä parempi kuin 10 metriä kahden viikon jälkeenkin. Silloin esimerkiksi voimamallin korjausten tekemä suuruusluokaltaan 5 metrin muutos näkyy selvästi lopputuloksessa ja on helpompi nähdä autoivatko tehdyt muutokset halutulla tavalla.

Siirrytäänpä seuraavaksi itse tilastojen tarkasteluun. Kuvassa 6.1 on esitetty miten II-A GPS satelliitin (SVN-33 ja PRN3) rataennusteiden keskimääräinen SISRE-virhe kasvaa ennustuksen pituuden mukaan (Kts. Johdanto, kaava (1.1)). Piirrettyjen kuvaajien palkkien kvantiilit ovat normaalit 5%, 25%, 50%, 75% ja 95%. Tästä kuvasta ja kaikista seuraavista tilastoista on myös poistettu niiden aikojen ennusteet, joihin on osunut ratakorjaus tai muu vastaava virhetekijä.



Kuva 6.1: Satelliittisukupolven II-A edustajan, PRN3:n ennuste. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypain (musta) ja lopuksi Auringon säteilypaineen korjaus pyörivälle satelliitin tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Voidaan nähdä selvästi, etteivät voimamallin korjaukset näytä olevan hyödyllisiä pitkän aikavälin ennusteissa. Ainoastaan Auringon säteilypainemallin korjaus (viimeisin eli oikeimman puoleisin korjaus) näyttää hieman järjestelmällisemmin parantavan tarkkuutta. Tuokaan korjaus ei näytä olevan merkittävä. Tarkkuuden lisäys on 1-2 viikon ennusteissa korkeintaan 10 prosenttia. Korjausten toimivuuden suhteen tämä satelliitti on keskimääräistä tasoa huonompi. Löytyy muutama satelliitti, joille korjaukset eivät auta juuri yhtään, mutta löytyy myös toisaalta joitakin satelliitteja, joille voimamallin korjaukset lähes puolittavat ennustuksen virheen (jopa pitkän aikavälin ennusteille). Tyypillisesti GPS II-A satelliiteille ei kuitenkaan voi laskea

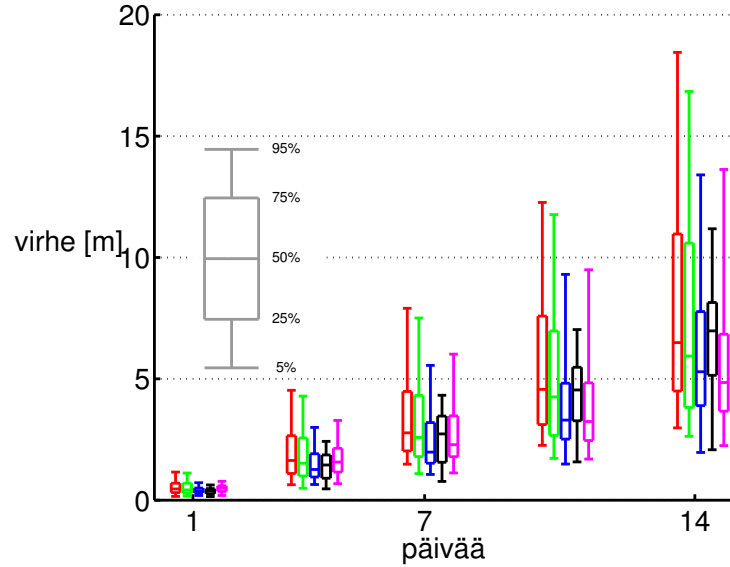


erityisen tarkkoja ennusteita. Ongelma lienee niiden epätarkemmissa kelloissa ja siinä, että niiden ephemerisdata on tuota kautta hieman epätarkempaa kuin uudemmilla satelliiteilla. Epätarkkuutta ei tarvitse olla paljoa. Jos satelliitti liikkuu  $3 \frac{km}{s}$  ja nopeudessa on virhettä  $1 \frac{mm}{s}$ , niin virhettä on jo enemmän, kuin missään tämän työn rataennusteissa. Lisäksi voi olla mahdollista, etteivät vanhat satelliitit suuntaa aurinkopaneelejaan yhtä tarkasti kohti Aurinkoa, kuin uudemmat satelliitit. On myös todennäköistä, että uudemmissa satelliiteissa on parempi lämpösuunnittelu, jolloin niiden lähettämä infrapunasäteily tuottaa pienemmän ”virhekihtyvyyden”. Se millä ratatasolla satelliitti on, ei näytä merkittävästi vaikuttavan rataennusteiden tarkkuuteen, vaan kyse on satelliittiyksilöiden käyttäytymisestä. Rataennusteet ovat joillekin satelliiteille niin epätarkkoja, ettei muutaman pienen korjausvoiman lisääminen voimamalliin näy ennustustarkkuudessa juuri mitenkään.

Silmämääräisesti kuvan 6.1 mukaan GPS satelliitin SVN-33 ennustamiseen auttavat kaikki korjaukset. Suhteellisuusteoriakorjauksen ja maansuuntaisen säteilypaineen (antennin työntövoima, Maan heijastama säteily sekä Maan emittoima lämpösäteily) korjauksen vaikutus on tosin melko vähäinen. Jos tämän toimivuutta haluaisi parantaa, pitäisi maapallon emittoima ja heijastama säteily mallintaa tarkemmin, kuin vain yhdellä vakiotyöntövoimalla. Mitä pidempiä ennustuksia tehdään, sitä vähemmän korjaukset auttavat tarkkuuteen. Käytännössä ilmiö johtuu siitä, että satelliitti yleensä ajautuu nopeasti kauas radan suunnan ennustetusta sijainnista. Se taas johtaa siihen, että maapallon gravitaatiopotentiaali alkaa näyttää erilaiselle, kuin mitä se oikeasti on ja ennustus alkaa ajautua myös muissa suunnissa kauemaksi satelliitin todelliselta radalta.

Kuten edellisessä kuvassa, noin puolet GPS satelliiteista käyttäytyvät vastaavasti, eikä niiden rataennusteiden laatu parannu pidempiä ennusteita tehdessä, kuin 10-15%. Toisaalta noin neljäsosalle satelliiteista pidempiaikaisten rataennustuksen laatu ei parane käyttämällä raskaampaa voimamallia. Lopulle neljäsosalle satelliiteista voimamallin korjaukset toimivat erittäin onnistuneesti - jopa pitkille kahden viikon rataennusteille. Tähän viimeiseen neljäsosaan ei yllä yksikään vanha II-A luokan satelliitti. Katsotaanpa seuraavaksi miten tähän kategoriaan kuuluvan GPS SVN-41 satelliitin ennusteet kohentuivat. Kyseessä on siis satelliitti, joka lähetti PRN14 signaalia ja kuului II-R luokkaan.

Kuvasta 6.2 huomataan, että DE202 ephemerisdatan käyttö on selkeästi tärkein voimamallin tarkennuksista. Kiinteän vuoromaan korjaus toimii myös systemaattisesti oikein, mutta korjaa vähemmän virhettä, kuin DE202 ephemerisdata Kuun ja Auringon sijainneille. Suhteellisuusteoriakorjaus ja Maan suuntainen säteilypaine-korjaus ei jälleen tuota merkittävää parantumista ennustustarkkuuteen. Sen lisäksi, että ennusteiden virhe pienenee järjestelmällisesti (lyhyillä ennustuksilla puolittuu ja pidemmällä pienenee noin 30%), virheiden kvantiilit lähenevät toisiaan. Se, et-

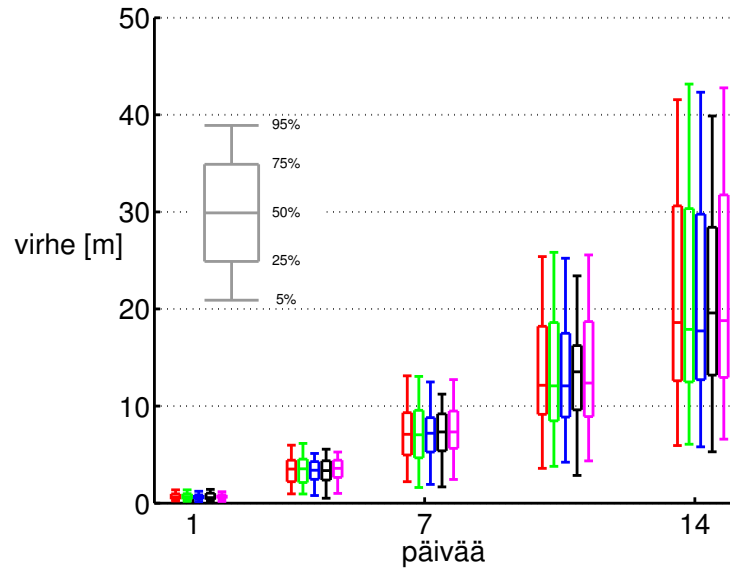


Kuva 6.2: Satelliittisukupolven II-R edustajan, PRN14:n ennuste. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypainne (musta) ja lopuksi Auringon säteilypainneen korjaus pyörivälle satelliitin tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

tä jotkin voimamallin lisätermiit kaventavat kvantiilien etäisyyttä toisistaan saat-  
taa antaa viitteitä siitä, että jokin tärkeä voima on vielä lisäämättä voimamalliin  
tai että jokin koordinaatistomuunnos tuottaa precise ephemeriksestä systemaatti-  
sen nopeusvirheen rataennustuksen aloitusvaiheeseen. Ilman tarkempaa tutkimusta  
asiasta ei kuitenkaan voi päästä varmuuteen. Noin puolet kyseisen satelliitin ra-  
taennusteista pysyy kahden viikon ajan alle 5 metrin virheessä. Se on erinomainen  
saavutus voimamallin keveyden huomioon ottaen.

Uudet satelliitit käyttäytyvät yleisesti rataennustusmallissamme paremmin kuin  
vanhat, mutta tämä ei tarkoita sitä, että kaikki uudet toimisivat moitteetta ja että  
niiden SISRE-virhe pysyisi alle 10 metrin tarkkuudessa ennustaessamme satelliit-  
tien liikkeitä pidemmällä kahden viikon aikaväleillä. Esimerkkinä tästä voidaan kat-  
soa vaikkapa GPS SVN-53 satelliittia. Se on ensimmäinen II-RM sukupolven satel-  
liiteista ja lähettää PRN17 signaalia. Kyseisen satelliitin rataennusteiden tilastojen  
kvantiilit voidaan nähdä alla olevasta kuvasta 6.3.

Voimamallin korjauksien vaikutus näyttää päällisin puolin hyvin vähäiseltä. On  
hyvin vaikeaa arvioida mistä satelliittien käytöserot johtuvat rataennusteita tehtäes-  
sä, sillä pelkkä ratataso ei näytä vaikuttavan merkittävästi satelliittien ennustustu-  
loksien tarkkuuteen. Todennäköisintä on se, että tiettyjen GPS satelliittien sijainti-  
määritykset ovat ongelmallisempia ja siten niiden precise ephemeriskään ei ole yhtä

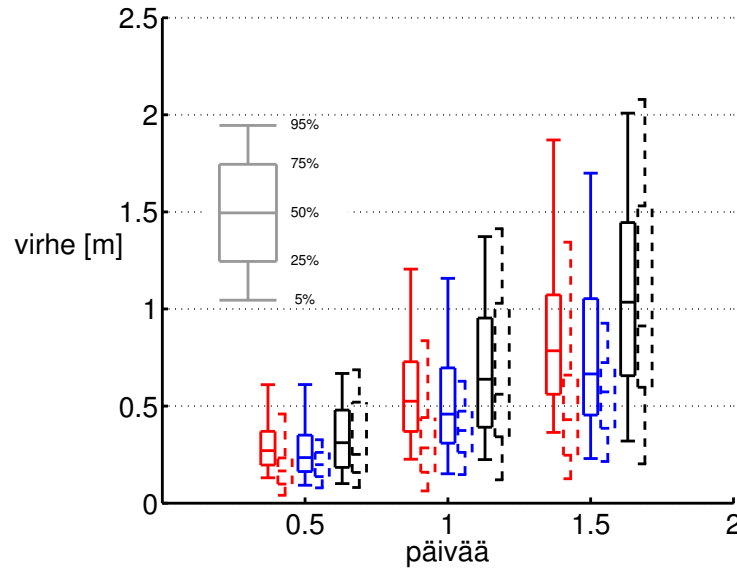


Kuva 6.3: Satelliittisukupolven II-RM edustajan, PRN17:n ennuste. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypainne (musta) ja lopuksi Auringon säteilypainne korjaus pyörivälle satelliitin tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

tarkka paikka- ja nopeustiedoiltaan, kuin toisten satelliittien. On toki myös mahdollista, että toisiin satelliitteihin maapallon heijastama auringonvalo osuu enemmän, kuin toisiin niiden ratapaikkojen perusteella, jolloin tarvittaisiin kunnollinen Maan albedomalli korjaamaan ennustusvirhettä. Tarkempi maankuoren vuorovaihtelujen malli saattaisi myös hieman auttaa.

Aiemmistä kuvista kävi ilmi, ettei rataennustusmalli paranna merkittävästi ennustustarkkuutta jos ennustuksen aikaväli on yli viikon. Toisaalta lyhyemmän aikavälin ennusteet paranevat melkein kaikilla GPS satelliiteilla reilusti. Ainoastaan muutamaa satelliittia lukuun ottamatta ennustustarkkuus paranee niin paljon, että lyhyellä aikavälillä (1 päivä tai lyhempi) voidaan olettaa ennustusvirheen olettaa jopa puolittuvan. Kyseessä on tosin SISRE-virhe, joten siinä ei näy juuri liikkeen suunnassa tapahtuva ajautuminen. Ennustuksien tarkentuminen on havaittavissa kuvasta 6.4.

On hieman yllättävää huomata, että vain muutamalle satelliitille voimamallin korjaukset eivät toimi lyhyissä ennusteissa. Toisaalta koska satelliitteja on vain muutama, nämä voitaisiin loppukäyttäjän vastaanottimissa pitää varasatelliitteina, joita ei käytetä paikka-arvion etsimiseen ellei ole pakko. Uutta voimamallia hyödyntämällä voisi ajatella loppukäyttäjän ylimääräisen GPS paikannusvirheen pysyvän alle 1,5 metrissä kahden päivän ajan. Vanhalla mallilla vastaava luku olisi ollut noin 2,5



Kuva 6.4: Hyvin lyhyet rataennusteet paranevat lähes aina käyttämällä voimamallin korjauksia. Tasainen viiva edustaa vanhalla mallilla tehtyä ennustusta ja katkonainen viiva uudella voimamallilla tehtyä. Punainen väri vastaa II-A -satelliittia, jota tarkastelimme aiemmin. Sininen taas edustaa aiempaa II-R satelliittia ja musta tarkasteltua II-RM satelliittia.

metriä. Tämä tosin vaatisi oletuksen siitä, että käytettävät satelliittien sijainti ja nopeustiedot olisivat yhtä tarkkoja, kuin käytetyssä NGA:n precise ephemeriksessä.

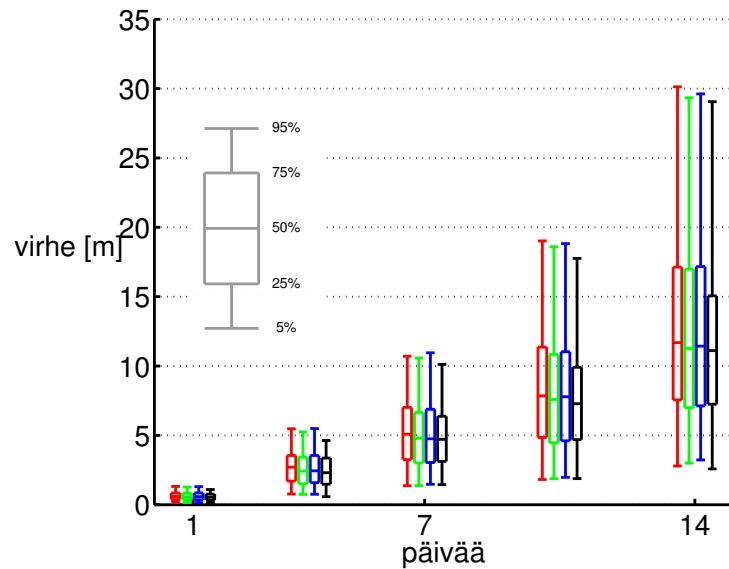
Kuten edellä olleista kuvaajista saattoi nähdä, tärkeimmät korjaukset GPS satelliittien rataennustusmalliin olivat DE202 ephemeriksen tarkemmat Auringon ja Kuun paikkalaskut, säteilypainekorjaus ja kiinteän vuoromaan vaihtelukoodi. Suhteellisuusteoriakorjaus, yksinkertainen albedomalli ja toisten planeettojen gravitaatiovaikutukset eivät sen sijaan näyttäneet tuottavan merkittäviä parannuksia ennustustarkkuuteen.

Vuonna 2012 oli käytössä jo yksi II-F luokan GPS satelliitti, mutta sen tarkastelu jätettiin tarkoituksella väliin. Nimittäin yhden satelliitin tarkastelusta voisi tehdä virheellisiä johtopäätöksiä koko satelliittisukupolven käyttäytymisestä. Luotettavampia tilastoja saadaan vasta tarkastelemalla useampia satelliitteja, jotka ovat eri tyyppisillä radoilla.

### 6.3 Ennusteet GLONASS satelliiteilla

GLONASS satelliittien paikkatiedot saatiin IGS:n eli *International GNSS Service* precise ephemeriksestä [17]. Kyseinen ephemeris antaa vain satelliittien paikkatiedot eri ajanhetkillä, joten tässä tutkimuksessa piti itse selvittää sijaintien perusteella satelliittien nopeudet. Satelliittien nopeudet voi määrittää niiden paikkojen

perusteella käyttämällä Kalmanin suodinta, mutta sen tekemää valmista ohjelma-koodia allekirjoittanut ei saanut käsiinsä. Ratkaisu, johon päädyttiin, laski satelliitin nopeuden sen perusteella, miten satelliitti ajautuisi voimamallin perusteella. Itse nopeuden iteroinnin suoritti Matlabin valmis funktio `fminsearch`, joka pyrkii löytämään nopeusvektorin, joka minimoi pienimmän neliösumman virheen ennustetun paikan ja precise ephemeriksen välillä. Näiden kahden precise ephemeriksen kertomien paikkojen väli oli ajallisesti 15 minuuttia. Käytetty ratkaisu tuottaa hieman epätarkemman ratkaisun ja on käytännössä hidas laskea. Jos tätä kautta lasketun nopeuden tarkkuutta haluaa arvioida tarkemmin, saman funktion käyttö toi GPS satelliitille PRN3 nopeusarvioiden maksimivirheeksi  $50 \frac{\mu m}{s}$ , kun estimoitua nopeutta verrattiin vuoden 2012 NGA:n GPS precise ephemerikseen. Tuo pieni virhe ei erityisesti haittaa tutkimuksessamme, sillä tarkat voimamallin toiminta-arviot saadaan GPS:n rataennustustilastoista ja jos jokin voimamallin korjaus ei toimisi muille GNSS järjestelmille, se olisi selvästi havaittavissa rataennustusten suhteellisena heikkenemisenä.



Kuva 6.5: GLONASS satelliitin PRN23 ennusteen SISRE -virhe. Korjaukset oikealta vasemmalle: Alkuperäinen ennuste (punainen), Kiinteän vuoromaan vaihteluiden korjaus (vihreä), suhteellisuusteoriakorjaus + albedo (sininen) ja lopuksi DE202 ephemeriksen tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (musta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

GLONASS satelliittien rataennusteisiin voimamallin tarkennukset eivät tuottaneet merkittäviä parannuksia. Ehkä ainoa havaittavissa oleva korjaus on DE202 ephemerisdatan käyttäminen Auringon ja Kuun paikkalaskuihin. Kuvassa 6.5 on nähtävissä miten voimamallin parannukset vaikuttivat parhaimmassa mahdollisessa

tapauksessa.

Voidaan selvästi havaita, että tälle satelliitille tarkempi voimamalli auttoi. Kyseessä on uusinta sukupolvea oleva GLONASS satelliitti. Suurimmalle osalle GLONASS satelliiteista voimamallin korjaukset eivät ole näin näkyviä. Karkea arvio voisi olla, että tämän satelliitin rataennusteet tarkentuivat noin kaksi kertaa niin paljon, kuin keskimääräisen GLONASS satelliitin. Huonoimmillaan GLONASS satelliittien rataennuste oli 14 vuorokauden päästä kerännyt 100 m SISRE virheen, kun parhaimmillaan SISRE virhe pysyi saman ajan 20 metrin paremmalla puolella (95% luottamusvälejä tarkastellen). Myös GLONASS satelliiteilla oli havaittavissa, että rataennusteet tarkentuivat voimamallin korjauksilla suhteellisesti enemmän, jos ennusteet ovat ajallisesti lyhyitä. Ei myöskään löytynyt montaa satelliittia, jotka olisivat poikkeuksia tähän sääntöön.

## 6.4 Ennusteet Beidou satelliiteilla

Tutkimuksessa laskettiin myös huomattava tilastollinen määrä rataennusteita Beidou eli Compass -satelliiteille. Satelliittien sijaintitiedot saatiin pääasiassa Wuhanin yliopiston precise ephemeriksestä [19]. Koska tuossa ephemeriksessä on aukkoja, noiden aukkojen sijainneissa satelliittien sijaintitietoja on pyritty hakemaan GFZ:n (*GeoForschungsZentrum Potsdam*) precise ephemeriksestä [19]. Aukot johtuvat suurimmalta osalta ilmeisesti ratakorjauksista ja erilaisista testeistä, joita satelliittien kanssa on tehty. Satelliitilta PRN13 puuttui huomattava määrä vuoden 2014 precise ephemeriksen paikkatietoja, joten tälle ei voitu laskea kovinkaan kattavaa tilastoa ennusteiden tarkkuuksista.

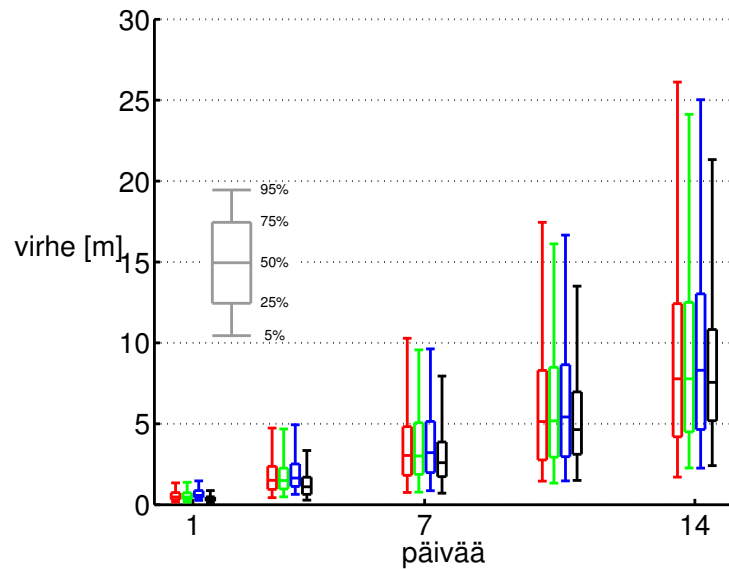
Käytetyissä ephemeriksissä ei annettu mukana satelliittien nopeuksia, joten nuopiti määrittää taas itse. Beidou satelliittien nopeudet määritettiin samalla algoritmilla, kuin GLONASS -satelliittienkin. Tutkimuksen kirjoittamisen ajanhetkellä Beidou-satelliiteista viisi ensimmäistä (PRN01-PRN05) ovat geostationäärisellä radalla olevia satelliitteja. Seuraavat viisi (PRN06-PRN10) ovat elliptisillä radoilla olevia satelliitteja ja loput neljä (PRN11-PRN14) ovat matalammilla ympyräradoilla olevia satelliitteja.

Tyypillisesti Beidou satelliiteille tehtävät ennustukset onnistuvat hyvin, jos satelliitti on elliptisellä tai matalammalla ympyräkiertoradalla. Taas geostationäärisille satelliiteille on vaikeampaa saada tehtyä tarkkoja rataennusteita nykyisellä voimamallilla. Tarkkaa syytä tähän ei ole vielä tiedossa, mutta voisi arvata, että joko maapallon albedolle pitäisi tehdä tarkempi korjaus tai sitten maapallon gravitaatiolle tulisi käyttää suurempaa osaa EGM2008 -mallin termeistä. Tässä työssä gravitaatiomallista oli käytössä 12x12 kokoiset matriisit. Käytännössä yksi tuon kokoinen matriisi sisältää 89 parametria. Täydellisen EGM 2008 mallin asteluku on 2160, jolloin gravitaatiokentälle on erillisiä parametreja yli 2,3 miljoonaa yhtä matriisia

kohden. Kun satelliitit liikkuvat nopeasti maapallon pinnan suhteen, yksittäiset gravitaatiopoikkeamat vaikuttavat vain hetken satelliitteihin ja vieläpä satelliitin niitä lähestyessä eri suuntaan, kuin satelliitin niistä paetessa. Toisaalta geostationäärisellä radalla pienemmätkin maapallon gravitaatiopoikkeamat voivat vaikuttaa vapaasti pitkän aikaa satelliittiin, kiihdyttäen sitä lineaarisesti. Tällöin virheet gravitaatiomallissa voivat tuottaa yllättäviä ongelmia. Toisaalta Montenbruckin kirjan [27] mukaan gravitaatiomallin tarkentaminen ei tuota riittävän suuria “korjauskihihtyvyyksiä”, jotta satojen metrien ajautumiset voitaisiin selittää.

Vielä yksi vaihtoehto geostationääristen satelliittien ajautumiselle voisi olla aika-riippuva säteilypainekihihtyvyys. Useilla satelliiteilla on havaittavissa pientä jaksollisuutta säteilypainetermeissä [34]. Jakson pituus on yleensä 6 kk. Kyseistä vaihtoehtoa ei kuitenkaan tässä työssä sen tarkemmin tutkittu Beidou satelliittien ennusteiden tarkentamiseksi.

Tarkastellaanpa ensin MEO radalla olevaa PRN12 satelliittia, jonka rataennusteiden tilasto on nähtävissä kuvassa 6.6.

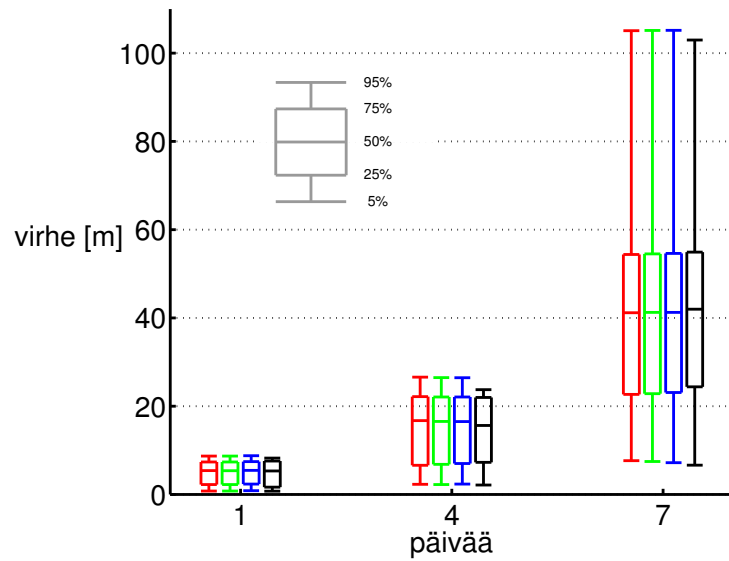


Kuva 6.6: Beidou (MEO) satelliitin PRN12 ennusteen SISRE -virhe. Korjaukset oikealta vasemmalle: Alkuperäinen ennuste (punainen), Kiinteän vuoromaan vaihteluiden korjaus (vihreä), suhteellisuusteoriakorjaus + albedo (sininen) ja lopuksi DE202 ephemeriksen tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (musta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Voidaan havaita, että matalammilla ympyrämaisilla kiertoradoilla olevat satelliitit hyötyvät kaikkien satelliittien tapaan tarkemmista Auringon ja Kuun paikkalaskuista, jotka saadaan DE202 ephemerisdatasta. Solid tide -korjaus saattaa myös hieman auttaa, mutta suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedokihihtyvyys ei näy-

tä auttavan rataennusteisiin mitenkään. Keskimääräinen rataennustustarkkuus on samaa luokkaa, kuin GPS satelliiteilla.

Seuraavaksi otetaan tarkasteluun ennustusmallimme kannalta ongelmalliset geostationääriset Beidou -satelliitit. Kuten aiemmin jo todettiin, ennustustarkkuus näille on selvästi heikompi. Lisäksi kyseisille satelliiteille tehdään runsaasti ratakorjauksia (käyttämällä moottoria), joiden luonteesta ennustusmallimme ei saa mitään informaatiota. Tilastoja tehdessä ratakorjauksia sisältävät ennustejankohdat on yksinkertaisesti pyritty karsimaan pois. Alla olevassa kuvassa 6.7 voidaan nähdä yhden geostationäärisen satelliitin käyttäytyminen ajankohtina:



Kuva 6.7: Beidou (GEO) satelliitin PRN02 ennusteen SISRE -virhe. Korjaukset oikealta vasemmalta: Alkuperäinen ennuste (punainen), Kiinteän vuoromaan vaihteluiden korjaus (vihreä), suhteellisuusteoriakorjaus + albedo (sininen) ja lopuksi DE202 ephemeriksen tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (musta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Tulokset ovat muutoin samankaltaisia, mutta ennustuksen tarkkuus on paljon huonompi. Käytännössä myös voimamallin tarkennukset vaikuttavat vähemmän, sillä kokonaisvirhe alkaa kasvaa niin nopeasti ja voimamallin korjaukset ovat liian pieniä näkyäkseen. Koska ratakorjauksia tehtiin vuoden mittaan melko paljon, useaan kahden viikon ennusteeseen osui sellainen. Tästä johtuen kuvaaaja kattaakin vain viikon ennusteet. Allekirjoittaneella kävi myös mielessä, että ottamalla planeettojen vuorovaikutukset huomioon, voisi ennusteet parantua, sillä geostationääriset satelliitit ovat kauempana maapallosta, kuin useammat GNSS satelliitit ja siten toiset planeetat vaikuttavat geostationäärisiin satelliitteihin enemmän. Tilastoja tarkastellessa huomattiin kuitenkin nopeasti, ettei planeettojen vaikutus rataennusteisiin

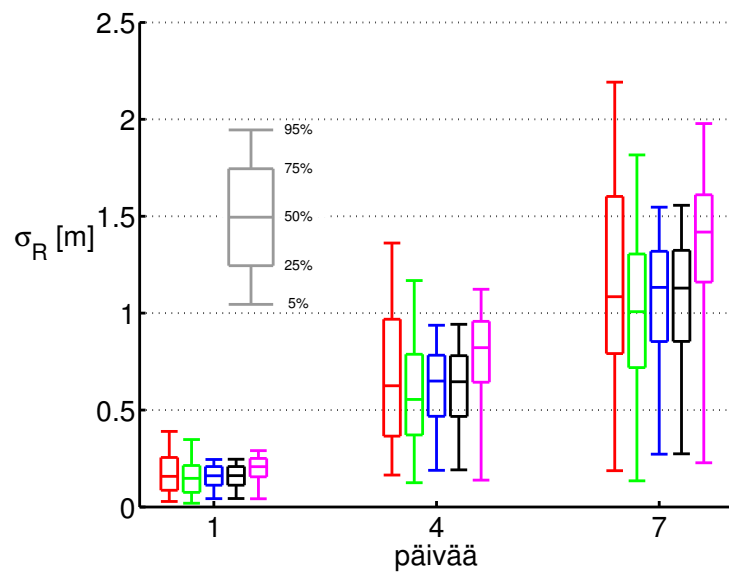


ollut näkyvä tässäkin tapauksessa.

Geostationäärisistä satelliiteista tarkasteltu PRN02 edusti keksimääräistä tarkkuutta rataennustuksien onnistumisen osalta. PRN04 ja PRN05 olivat tarkempia ja pysyivät viikon keskimäärin 50 metrin SISRE -virherajoissa, kun taas PRN01 ja PRN03 olivat epätarkempia vaatien lähes 150 metrin SISRE -virherajat viikon ennustuksille.

## 6.5 Yhteenveto korjausten toimivuudesta ja RTN virhe

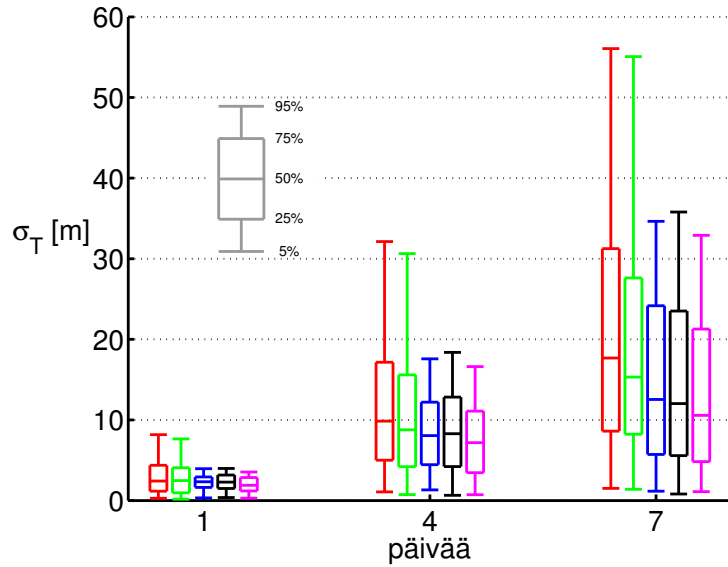
Tässä tutkimuksessa tarkastellaan vielä miten käytetyt korjaukset vaikuttavat RTN virheeseen. Koska korjaukset ovat hyvin pieniä, tarkastellaan sellaisen satelliitin ennustustarkkuuden muutoksia, jonka rataennusteet olivat jo alunperin tarkkoja. Lisäksi koska korjausten toimivuus näkyy helpoiten lyhyissä ennusteissa, unohdamme yli viikon ennusteet kokonaan. Sopivana tarkasteltavana satelliittina voidaan pitää esimerkiksi GPS satelliittia SVN-48, joka lähettää PRN7 signaalia. Tuo satelliitti kuuluu toiseksi uusimpaan II-RM sukupolveen. Kyseisen satelliitin RTN virheen pientyminen voimamallin korjauksien kanssa on nähtävissä kolmesta seuraavasta kuvaajasta. Katsotaanpa ensin etäisyyden virhettä maapallosta, joka voidaan nähdä kuvassa 6.8:



Kuva 6.8: GPS satelliitin PRN7 RTN virheen radiaalinen -osa. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypainne (musta) ja lopuksi Auringon säteilypainne korjaus pyörivälle satelliitin tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Kuten voidaan nähdä, etäisyysvirheeseen maapallosta vaikuttaa eniten solid tide

-korjaus ja box-wing-korjaus. Box-wing-korjaus tosin lisää radiaalista virhettä. Joilakin satelliiteilla box-wing-korjaus puolestaan pienentää radiaalista virhettä. Muut korjaukset eivät näyttäneet vaikuttavan erityisen merkittävästi etäisyysvirheeseen maapallosta. Sama piti paikkansa useimmille GPS satelliiteille. Seuraavassa kuvassa 6.9 on esitetty saman satelliitin radan suuntaisen virheen kertymisen tilastot:



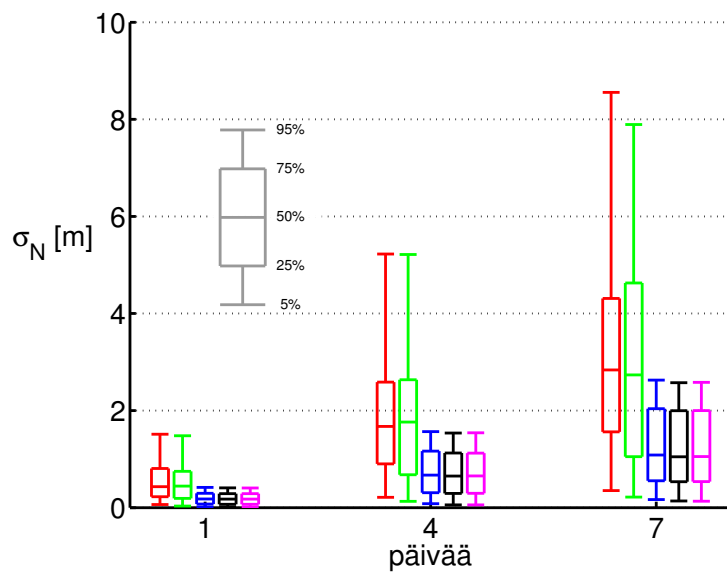
Kuva 6.9: GPS satelliitin PRN7 RTN virheen T -osa. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypain (musta) ja lopuksi Auringon säteilypain korjaus pyörivälle satelliitille tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Voidaan selkeästi havaita, että radan suuntainen virhe on suuruusluokaltaan moninkertainen muihin RTN komponentteihin nähden. Tällä satelliitilla kaikki korjaukset pienensivät radan suuntaista virhettä, mutta huomattavin vaikutus oli DE202 ephemerisdatan käytöllä Kuun ja Auringon paikkalaskuissa. Kaikilla satelliiteilla DE202 datan käytön vaikutus näkyy virheen pienenemisenä, mutta box-wing-korjauksen ja suhteellisuusteoriakorjauksen vaikutus ei aina pienennä virhettä. Suhteellisuusteoriakorjaus (ja antennin työntövoima) näyttää pääpiirteittäin tuovan vain lisää kohinaa virheeseen, mutta box-wing-korjaus auttaa miltei aina jossain näistä RTN suunnista tarpeeksi, että SISRE -virhe pienenee.

Jos tarkastellaan seuraavaksi radan poikkisuuntaista virhettä, voidaan nähdä, että ainoa toimiva korjaus on tarkempi Auringon ja Kuun paikkadata DE202 ephemeriksestä. Mielenkiintoista kuitenkin on se, että vaikka muut korjaukset tuntuvat auttavan satelliittiriippuvasti eri RTN suuntiin, DE202 ephemeriksen käyttö vaikuttaa lähes aina myönteisesti juuri normaalin suuntaiseen ennustusvirheeseen.

Satelliittien rataennustuksista voidaan vielä palata planeettojen gravitaatiovuorovaikutusten näkyvyyteen. Vaikka edellisissä SISRE -tilastoissa havaittu planeettojen vaikutusta satelliittien liikkeeseen, RTN virheessä planeettojen voidaan silti joskus nähdä. Tällöin kuitenkin virhe usein kasvaa esimerkiksi etäisyydessä maapalloon ja vähenee radan suunnassa. Kokonaisuus ei silloin näy SISRE -virheen tilastoissa, mutta tämän huomion nojalla planeettojen vuorovaikutuksia ei voida unohtaa, jos aiotaan tehdä tai kalibroida tarkempaa albedo -mallia maapallon heijastamalle auringonvalolle ja emittoimalle lämpösäteilylle.

Viimeisessä RTN virheitä esittävässä kuvassa 6.10 on nähtävissä radan poikkisuuntaisen virheen tilastollinen käyttäytyminen.



Kuva 6.10: GPS satelliitin PRN7 RTN virheen N -osa. Korjaukset vasemmalta oikealle: Vanha malli (punainen), maankuoren vuorovaihtelut (vihreä), DE202 (sininen), suhteellisuusteoriakorjaus + antennin säteilypaine (musta) ja lopuksi Auringon säteilypaineen korjaus pyörivälle satelliitin tekniselle laatikolle (magenta). Korjauksia on lisätty voimamalliin yksi kerrallaan ja oikeimman puoleisin sarake tarkoittaa voimamallia kaikkien mainittujen korjausten kanssa.

Alunperin DE202 ephemeris otettiin käyttöön, jotta voitaisiin laskea Jupiterin ja Venuksen gravitaatiokorjaukset satelliittien rataennusteisiin. Käytännössä osoitautui, että nuo voimat eivät vaikuta juuri rataennusteisiin (nykyisen voimamallin kanssa). Tuon korjauksen merkityksettömyyden vuoksi planeettojen vaikutuksista ei myöskään piirretty kuvia. Auringon säteilypainemallin box-wing-korjaus toimii kutakuinkin yhtä hyvin, kuin kiinteän Maan vuorovaihtelut huomioiva korjaus.

“Solid tide” eli kiinteän Maan vuorovaihteluiden korjaus ei tuottanut merkittävään suuria parannuksia ennustustarkkuuteen, vaikka korjauksen tuottama kiihtyvyys on suuruusluokaltaan välillä jopa  $10^{-8} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Työssä käytettiin pääsääntöisesti Monten-

bruckin kirjan [27] esittämää solid tide mallia, mutta allekirjoittanut testasi myös IERS technical note 36:ssa [16] esiteltyä korjausta. Tuokin korjaus näytti tuottavan järjestelmällisen parannuksen ennustustarkkuuteen, mutta tarkkuus parani hieman vähemmän, kuin Montenbruckin mallin kanssa. Ilmeisesti solid tide voimakorjauksen suunnassa vaikuttaa niin moni huomioimaton kiihtyvyys, että korjauksen vaikutus hukkuu virheen sisältämään kohinaan. Jos maapallon albedon vaikutusta tutkitaan myöhemmin, kiinteän Maan vuorovaihteluiden, Jupiterin ja Venuksen vaikutukset kannattaa pitää voimamallissa. Kiinteän vuoromaan korjausta käytettäessä Maan gravitaatiopotentiaalin kerroin  $C(2,0)$  tulisi periaatteessa muuttaa tide-free potentiaalin mukaiseksi. Allekirjoittanut kokeili tuota solid tide -korjauksen kanssa, mutta tulokset eivät antaneet lisätarkkuutta ennusteeseen (ainakaan tutkimuksen kirjoittamisen hetkellä käytössä olleella voimamallilla).

Tässä luvussa esitetyt esimerkkikuvat tilastoista eivät ole erityisen kattavia, mutta koko tilastollisesta aineistosta on koottu liitetaulukot A.1–A.8. Näistä voidaan tarkastella yksittäisten satelliittien käyttäytymistä ja koko satelliittikonstellaatioiden keskimääräistä käyttäytymistä, kun ennustusalgoritmiin lisätään erilaisia korjauksia. Näissä taulukoissa on käsitelty SISRE-virheitä. Taulukoista selviää se, etteivät yli usean päivän rataennustukset parane keskimäärin kovin paljoa. Lisäksi GLONASS ja Beidou -satelliiteille saadut tulokset ovat hieman heikompia, joka kielii epätarkasta alkunopeuden estimoinnista. Epätarkat alkunopeudet taas johtavat siihen, etteivät pienemmät korjaukset voimamallissa tahdo näkyä enää ollenkaan rataennusteiden tarkkuudessa. Toisaalta näistä taulukoista käy yhä selvemmin ilmi tarkempien Auringon ja Kuun paikkojen käytön edut. Kiinteän vuoromaan vaihteluiden ja säteilypainemallin box-wing -korjaus tuo tilastojen keskiarvoihin nähtävän parannuksen. Taulukot myös vahvistavat olettamusta siitä, ettei suhteellisuusteoreettinen maapallon gravitaatiokiihtyvyyden korjaus toimi ainakaan nykyisen tasaisen albedovoiman kanssa erityisen hyvin.

Jotkin satelliitit keräävät ennustusvirhettä huomattavasti nopeammin kuin toiset. Helpoimmin näiden huonommin käyttäytyvien satelliittien ennustuksia voisi parantaa muokkaamalla tilastojen pohjalta uutta empiiristä säteilypaineen korjausvoimamallia, johon lisättäisiin tarpeelliset säteilypainevoimat satelliittien ennustusten tarkentamiseksi. Käytännössä tämä pitäisi tehdä lisäämällä malliin yksi voima kerhallaan ja tutkimalla tilastollisesti mihin suuntaan satelliitti alkaa ajautua precise ephemeriksen sijainneista. Voimat voivat ilmetä pääsääntöisesti RTN suunnissa ja säteilypainemallin huomioimissa suunnissa, mutta uudet voimat eivät pysy vakioina, vaan muuttuvat ajan funktiona. Käytännössä tuo riippuvuus pitäisi etsiä maapallon, Auringon ja satelliitin välisten kulmien kautta. Tuota aikariippuvuutta voisi mallintaa joko sinimuotoisilla termeillä tai jollain hieman monimutkaisemmilla funktioilla, riippuen siltä, mitä tilastojen mediaani kertoo tarkasteltavan satelliitin käytöksestä.

Ennen työn aloittamista olisi hyvä perehtyä jo käytössä oleviin säteilypainemalleihin [11]. Kun on lopulta löydetty näiden uusien pienten voimien suunnat ja kulma- sekä aikariippuvuudet, voidaan rakentaa estimaattori, joka estimoi kerralla kaikki säteilypainetermit halutuilla optimointikriteereillä.

## 6.6 Laskenta-ajan pidentyminen

Mikäli tavallisessa GPS vastaanottimessa halutaan hyötyä nopeasta satelliittilukituksesta laskemalla satelliittien sijaintidata itse, pitäisi kyseisen laitteen olla laskentateholtan suorituskykyinen ja rataennustusmallin laskennallisesti mahdollisimman kevyt. Siksi onkin järkevää tutkia myös voimamallin korjausten pidentämää laskuaikaa, jotta voidaan optimoida lisääntynyt laskenta-aika ja akkukulutus tarkentuneeseen ennusteeseen. Seuraavaan taulukkoon 6.2 on kerätty tutkimuksen kirjoittamiin käytetyn Macbook Pron laskenta-ajoista taulukko. Laskujen tekemiseen käytettiin 64-bittistä Matlabia (r2014a 8.3.0.532). Macbook Prossa oli 16 Gt 1333 MHz:n RAM muistia ja 2,3 GHz Core i5-2410M suoritin. Jokainen tähän taulukkoon laskettu rataennuste oli 7 päivää pitkä ja annettu laskenta-aika oli 100 rataennusteen keston keskiarvo. DE202 ephemeriksen käyttöön on sisällytetty Jupiterin, Venuksen, Maan, Auringon ja Kuun paikkalaskelmat.

Taulukko 6.2: Voimamallin korjausten tuottama rataennustusten ajankäytön lisäys yhdelle satelliitille. Tutkittujen ennusteiden pituus oli 7 vuorokautta.

Voimamalli	Käytetty aika (s)	Ajankäytön lisäys
Alkuperäinen	11,2	-
DE202	19,1	71%
DE202 (ei tiedostolukua)	18,3	63%
Solid tide	19,2	71%
Suhteellisuusteoria	11,5	3%
Antennin työntövoima	11,2	0%
Box-wing SRP	12,0	7%
Yhdistetty	28,2	152%

Laskenta-ajan pidentyminen voi näyttää edellisen taulukon perusteella melko lohduttomalta, mutta tilanne paranee, jos ennusteet tehdään koko satelliittikonstellaatille kerrallaan. Esimerkiksi kiinteän Maan vuorovaihteluiden korjaus sekä tarkemmat Kuun ja Auringon paikkalaskelmat toimivat kaikille satelliiteille yhteisesti, jolloin riittää että ne lasketaan kerran jokaisella ennustusaskeleella. Valitettavasti suhteellisuusteoriakorjaus on riippuvainen satelliittien nopeuksista, joten se joudutaan laskemaan jokaiselle satelliitille erikseen. Samoin säteilypainemallin korjaukset pitää tehdä jokaiselle satelliitille erikseen. DE202 ephemeriksen käytön raskain osuus

on ilmeisesti toistuva Chebychevin polynomien approksimointi for-silmukassa, sillä jokaisella silmukan ajokerralla lasketaan kosinin arvo. Käytännössä yhden aika-askeleen aikana tulee siten laskettua satoja kosinin ja arkuskosinin approksimaatioita. DE202 ephemeriksen koodin ajoajan voisi siten luultavasti miltei puolittaa, jos Venuksen ja Jupiterin paikkoja ei evaluoitaisi ollenkaan. Säteilypainemallin raskain osuus on puolestaan kulmien approksimointi vektoreista. Kulman approksimointia voisi yrittää nopeuttaa tekemällä jonkinlaisen oman kevyemmän approksimaatiofunktion, mutta sitä ei tässä tutkimuksessa testattu. Kannattaa myös huomata, että jos säteilypainemalliin lisättäisiin uusia voimatermejä ja uusien termien kanssa pitäisi approksimoida uusia kulmatermejä, laskeminen hidastuisi entisestään.

Koko GPS satelliittiryhmän ennusteiden kerralla laskeminen hidastuu voimamallin korjauksilla taulukon 6.3 mukaisesti. Korjausten hidastuminen on extrapoloitu yhden satelliitin ennusteiden ajankäytön perusteella.

Taulukko 6.3: Arvioitu voimamallin korjausten tuottama ajankäytön lisäys koko GPS konstellation rataennusteisiin (32 satelliittia).

Voimamalli	Ajankäytön lisäys
DE202	5%
Solid tide	5%
Suhteellisuusteoria	3%
Antennin työntövoima	0%
Box-wing SRP	7%
Yhdistetty	20%

Kun rataennusteita ollaan siis tekemässä samanaikaisesti useampia, ei laskennan pitäisi merkittävästi hidastua, vaikka käytettäisiinkin tässä tutkimuksessa rakennettua uutta voimamallia tai jotain sen osia. Jos DE202 ephemeriksen käyttöfunktioita pudottaa pois planeettojen sijaintien laskut, voidaan olettaa, että ephemeriksen käyttö nopeutuisi vielä tuntuvasti.

Laskenta-aika siis pitenee noin 20% aiempaan nähden. Tämä tarkoittaa sitä, että lyhyissä alle kahden päivän ennusteissa laskenta-aika pitenee prosentuaalisesti vähemmän kuin mitä ennusteen tarkkuus kasvaa. Toisaalta jos ennusteen pituus on yli viikko, tarkkuuden kasvu jää alle 10%:iin. Tilanteesta riippuen tällöin ei ehkä enää kannata käyttää tarkempaa voimamallia. Saattaisikin olla järkevintä käyttää ennusteen ensimmäisen kahden päivän laskemiseen tarkempaa voimamallia ja sitten siirtyä loppuennusteen osalta vanhaan, kevyempään voimamalliin. Tällöin voitaisiin hyödyntää tarkemman voimamallin tarkkuutta pidentämättä laskenta-aikaa juuri-kaan.

## 7. YHTEENVETO

Tämän tutkimuksen tarkoituksena oli selvittää, voidaanko satelliittien voimamallia parantaa, jotta niiden rataennusteet tarkentuisivat. Useimmat testatut voimamallin korjaukset eivät tuottaneet merkittäviä parannuksia voimamallin tarkkuuteen. Rataennusteiden tarkentuminen oli kuitenkin nähtävissä erityisesti GPS satelliiteille, joille tehtiin lyhyitä rataennusteita. Osoittautui myös, että jotkin satelliitit hyötyivät enemmän rataennusteista kuin toiset.

Jos satelliittien rataennusteita pitäisi edelleen tarkentaa, nykyisen säteilypainemallin tarkkuus on suurin ongelma. Säteilypainemallia voidaan parantaa monella tavalla. Säteilypaineparametrit voidaan esimerkiksi arvioida uudelleen ennen jokais- ta ennustetta edellisten viikkojen ephemeriksen perusteella. Toinen vaihtoehto olisi etsiä säteilypainetermien aikariippuvuus ja muodostaa sopivat analyttiset funktiot, jotka approksimoisivat tuota riippuvuutta. Aiempia tutkimuksia olisi syytä hyödyn- tää, jos tähän ryhdytään [11]. Lisäksi säteilypainemalliin voisi liittää maapallon ja Auringon välisten kulmien suhteen riippuvia termejä, jotka huomioisivat maapallon ja satelliitin lähettämää infrapunasäteilyä ja maapallon albedon heijastamaa au- ringonvaloa. Säteilypainemallin korjaamista testattiin tässä tutkimuksessa lyhyesti yhdellä box-wing-tyyppisellä korjauksella, joka osoittautui pääpiirteissään toimivak- si. Lisäämällä vastaavia termejä säteilypainemalliin voitaisiin rataennustusten tark- kuutta nostaa mitä suurimmalla todennäköisyydellä.

E erityisen hyvin toimivaksi osoittautui DE202 ephemerisdatan käyttö Auringon ja Kuun paikkalaskelmissa. Jupiterin ja Venuksen gravitaatiovuorovaikutus ei näky- nyt SISRE -virheen laskuissa mitenkään, mutta RTN -virheessä planeettojen vuo- rovaikutukset olivat nähtävissä. Mikäli tarkempaa säteilypainemallia aletaan joskus tehdä, tulee planeettojen gravitaatiovoimat olla mukana voimamallissa. Tällöin kan- nattaa kuitenkin huomioida, että säteilypainekorjaukset ovat satelliittikohtaisia ja hidastavat rataennustuksen laskemista huomattavasti.

Nykyisen voimamallin epätarkkuuksista johtuen antennin työntövoimaa ja Maan gravitaation vaikutusta ei tarvitse välttämättä ottaa mukaan voimamalliin. Maapal- lon albedon heijastaman valon ja maapallon emittoiman lämpösäteilyn pitäisi peri- aatteessa vaikuttaa satelliittiin tarpeeksi, että se olisi tärkeää ottaa huomioon [27], mutta tässä tutkimuksessa ei sitä ehditty paljoa tutkia. Sekin tarkempi Maan albe- don tuottaman voiman malli, jota tässä tutkimuksessa kokeiltiin, jäi kalibroimatta

ja hyödyntämättä.

Tutkimuksen aikana löydettiin myös muita voimia, jotka pitäisi ehkä ottaa huomioon tarkemman säteilypainemallin kanssa. Näistä merkityksellisimmät olivat Auringon säteilyn tulosuunnan muutos johtuen satelliitin liikkeestä Aurinkoon nähden ja Auringon gravitaation suhteellisuusteoriakorjaus.

Useimmat pienet voimamallin korjaukset eivät näkyneet tutkimuksessa tehdyissä tilastoissa. Ilmiö johtuu siitä, että satelliittiin kohdistuu paljon erilaisia pieniä voimia, joiden huomioiminen on vaikeaa ja johtaa laskennallisen kuorman nopeaan kasvuun. Jos otamme huomioon vain yhden tai kaksi näistä, voimamallin ei voida sanoa merkittävästi parantuneen. Esimerkkinä mainittakoon yksi samaan suuntaan ICRS -koordinaatistossa vaikuttava  $1,0 \cdot 10^{-11} \frac{m}{s^2}$  kiihtyvyys. Tällaisella pienellä voimamallin muutoksella rataennuste poikkeaisi kahden viikon jälkeen oikeasta noin 7 metrin verran. Voidaan myös todeta, että maapallon albedon heijastama säteily riippuu pilvien määrästä ja tämän ennustaminen tarkasti ei ole enää helppoa. Jos taas albedon suuruusluokka vaihtelisi pilvipeitteen mukaan 10%, niin se tarkoittaisi yli kymmenkertaista virhekkiihtyvyyttä yllä mainittuun esimerkkiin nähden (joskin tuo virhekkiihtyvyys ei osoittaisi staattisesti samaan suuntaan). Vastaavansuuruisia virhekkiihtyvyyksiä muodostuisi myös pienistä aurinkopaneelien suuntausvirheistä.

Tämän työn puitteissa lopputulokseksi voisikin sanoa, ettei rataennusteiden tarkentaminen enää onnistu helposti. Pieniä parannuksia voidaan saada aikaan tarkentamalla säteilypainemallia satelliittien käyttäytymisen tilastojen pohjalta, mutta kertaluokkaa parempi ennustustarkkuus saavutettaisiin ainoastaan lisäämällä voimamalliin kymmeniä uusia pienempiä voimatermejä. Mikäli satelliitin asennossa olisi parinkin asteen satunnaisuutta, ei edes edellinen menetelmä toimisi. Voidaan myös arvioida, että kymmenien voimatermien lisääminen voimamalliin lisäisi laskennallista taakkaa tuntuvasti ja siten mobiililaitteisiin suunnattuihin käyttötarpeisiin tämä ratkaisu ei soveltuisi erityisen hyvin (ainakaan nykyisillä akkukapasiteeteilla ja laskentatehoilla).

Tämän tutkimuksen suurin saavutus jäi lyhyiden 1–2 päivän ennusteiden tarkkuuden kasvattamiseen. Jos satelliittien alkunopeudet ja alkupaikat ovat tarkasti tiedossa, lyhyiden ennusteiden tarkkuus kasvoi noin 30%. Tilastojen mukaan GPS-ennusteet paranivat eniten, mutta voidaan olettaa että myös GLONASS ja Beidou-ennusteet paranevat enemmän, jos alkunopeudet estimoitaisiin tarkemmin.



## LÄHTEET

- [1] Sima Adhya, *Thermal Re-Radiation Modelling for the Precise Prediction and Determination of Spacecraft Orbits*, Väitöskirja, University of London, 2005. Saatavissa (viitattu 28.4.2015): <http://www-research.cege.ucl.ac.uk/gnrg/PhD/SimaThesis.pdf>
- [2] Juha Ala-Luhtala, Mari Seppänen, and Robert Piché. *An empirical solar radiation pressure model for autonomous GNSS orbit prediction*. In Proceedings of PLANS 2012 IEEE/ION Position Location and Navigation Symposium, pages 568-575, April 2012.
- [3] Matthew M. Berry and Liam M. Healy, *Implementation of Gauss-Jackson Integration for Orbit Propagation*, The Journal of the Astronautical Sciences, Vol. 52, Nro 3, Heinä-Syyskuu 2004, s. 331-357. Saatavissa (viitattu 6.11.2014): <http://drum.lib.umd.edu/bitstream/1903/2202/7/2004-berry-healy-jas.pdf>
- [4] S. Carlip, *Aberration and the Speed of Gravity*, Phys. Lett. A267 (2000) 81–87, 1999. Saatavissa (viitattu 7.1.2015): <http://arxiv.org/abs/gr-qc/9909087>
- [5] China Satellite Navigation Office, *BeiDou Navigation Satellite System performance standard*. Saatavissa (viitattu 29.4.2015): <http://www.beidou.gov.cn/attach/2013/12/26/20131226298ff2928cc34e45b4714a6ac0e14a1c.pdf>
- [6] T. Damour, *Three Hundred Years of Gravitation*, editoijat: S.W. Hawking ja W. Israel, Cambridge Univ. Press, New York, USA, 1987, 695 s.
- [7] European Space Agency, Navipedia, *GLONASS Performances*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 15.1.2015): [http://www.navipedia.net/index.php/GLONASS\\_Performances](http://www.navipedia.net/index.php/GLONASS_Performances)
- [8] Rick Fisher, *Description of JPL Solar System Ephemeris*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 2.11.2014): [http://www.cv.nrao.edu/~rfisher/Ephemerides/ephem\\_descr.html#ref8](http://www.cv.nrao.edu/~rfisher/Ephemerides/ephem_descr.html#ref8)
- [9] Rick Fisher, *Python Client for Computing Positions of Planets, Pulsar Pulse Delays, LST, Precession, Nutation and Aberration*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 28.4.2015): [http://www.cv.nrao.edu/~rfisher/Python/py\\_solar\\_system.html](http://www.cv.nrao.edu/~rfisher/Python/py_solar_system.html)
- [10] Richard Fitzpatrick, Texasin Austinin yliopisto, Fysiikan laitos, *The Stefan-Boltzmann law*, luentomateriaali. Saatavissa (viitattu 28.4.2015): <http://farside.ph.utexas.edu/teaching/sm1/lectures/node85.html>

- [11] Laurent Froideval, *A Study of Solar Radiation Pressure Acting on GPS Satellites*, 2009. Saatavissa (viitattu 14.4.2015): <http://repositories.lib.utexas.edu/handle/2152/6623>
- [12] E. Hairer, S. P. Nørsett and G. Wanner, *Solving ordinary differential equations. 1, Nonstiff problems, 2. Painos*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg 1993. 528 s. Saatavissa (viitattu 14.4.2015): [http://thor.info.uaic.ro/~fliacob/An2/2014-2015/Resurse\\_MCM\\_2015/Hairer,%20Nørsett,%20Wanner\\_Solving%20Ordinary%20Differential%20Equations%20I.pdf](http://thor.info.uaic.ro/~fliacob/An2/2014-2015/Resurse_MCM_2015/Hairer,%20Nørsett,%20Wanner_Solving%20Ordinary%20Differential%20Equations%20I.pdf)
- [13] Liang Heng, Grace Xingxin Gao, Todd Walter, and Per Enge, *Statistical Characterization of GLONASS Broadcast Clock Errors and Signal-In-Space Errors*. Saatavissa (viitattu 9.2.2015): [http://waas.stanford.edu/papers/Heng\\_IONITM\\_2012\\_StatAnalofGlonassClockAndSISErrors\\_Paper.pdf](http://waas.stanford.edu/papers/Heng_IONITM_2012_StatAnalofGlonassClockAndSISErrors_Paper.pdf)
- [14] S. Herrick, *Astrodynamics: Orbit Correction, Perturbation Theory, Integration*, Volume 2, Van Nostrand Reinhold Company, New York 1972, 348 s.
- [15] Jens Madsen Houlik, *The relativistic wave vector*, European Journal of Physics, No. 30, 2009, s.777–783. Saatavissa (viitattu 9.4.2015): <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?rep=rep1&type=pdf&doi=10.1.1.205.7549>
- [16] International Earth Rotation and Reference Systems Service, *IERS Technical Note No. 36*. Saatavissa (viitattu 26.3.2015): [http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36.pdf?\\_\\_blob=publicationFile&v=1](http://www.iers.org/SharedDocs/Publikationen/EN/IERS/Publications/tn/TechnNote36/tn36.pdf?__blob=publicationFile&v=1)
- [17] International GNSS Service, *IGN product area - Precise satellite orbits and clocks*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 9.2.2015): [http://igscb.jpl.nasa.gov/components/dcnv/ign\\_products\\_www.html](http://igscb.jpl.nasa.gov/components/dcnv/ign_products_www.html)
- [18] International GNSS Service, *IGS Products*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 29.4.2015): <https://igscb.jpl.nasa.gov/components/prods.html>
- [19] International GNSS Service, *IGS MGEX Products - Precise Orbit and Clock Products*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 9.2.2015): <http://igs.org/mgex/products>
- [20] International Laser Ranging Service, *ILRS meeting on Retroreflector Arrays*. Saatavissa (viitattu 17.1.2015): [http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/retromtg\\_060406.pdf](http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/retromtg_060406.pdf)

- [21] International Earth Rotation and Reference Systems Service, *Data / Products*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 29.4.2015): <http://www.iers.org/IERSEN/DataProducts/data.html>
- [22] International Earth Rotation and Reference Systems Service, *The International Celestial Reference Frame (ICRF)*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 10.4.2015): <http://www.iers.org/IERSEN/DataProducts/ICRF/icrf.html>
- [23] International Laser Ranging Service, *ILRS meeting on Retroreflector Arrays*, esityskalvot. Saatavissa (viitattu 17.1.2015): [http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/retromtg\\_060406\\_slides.pdf](http://ilrs.gsfc.nasa.gov/docs/retromtg_060406_slides.pdf)
- [24] D. Kuang, H. J. Rim, B. E. Schutz and P. A. M. Abusali, *Modeling GPS satellite attitude variation for precise orbit determination*, Journal of Geodesy 1996, Volume 70, Issue 9, p. 572-580.
- [25] Maanmittauslaitos, *Satelliittimittaus eli GPS-mittaus*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 14.1.2015): <http://www.maanmittauslaitos.fi/kartat/kartoitus/gps-mittaus>
- [26] Jean Meesius, *Astronomical Algorithms*, 2. painos, Willmann-Bell, Inc, Richmond, Virginia, USA, 1998. 477 s. Saatavissa (viitattu 14.4.2015): [http://www.eacocon.it/wp/ebooks/download\\_center\\_lite/index.php?Astronomical%20Algorithms%202.pdf](http://www.eacocon.it/wp/ebooks/download_center_lite/index.php?Astronomical%20Algorithms%202.pdf)
- [27] Oliver Montenbruck, Eberhard Gill, *Satellite Orbits*, 4. painos, Springer Heidelberg New York Dordrecht London 2012. 369 s.
- [28] Nasa, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, *JPL Space Images*. Käyttöoikeudet: <http://www.jpl.nasa.gov/imagepolicy/>. Saatavissa (viitattu 21.1.2015): <http://www.jpl.nasa.gov/spaceimages/index.php?search=gravity&earth#submit>
- [29] Nasa, Jet Propulsion Laboratory, California Institute of Technology, *The Global Differential GPS System*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 14.1.2015): <http://www.gdgps.net>
- [30] Markku Poutanen, Aalto-yliopisto, *Astronomiset koordinaatistot ja aika*, luentokalvot. Saatavissa (viitattu 12.4.2015): [https://noppa.aalto.fi/noppa/kurssi/maa-6.2279/luennot/Maa-6\\_2279\\_astronomiset\\_koordinaatistot\\_ja\\_aika.pdf](https://noppa.aalto.fi/noppa/kurssi/maa-6.2279/luennot/Maa-6_2279_astronomiset_koordinaatistot_ja_aika.pdf)
- [31] Andrei Pukkila, Tampereen Teknillinen Yliopisto, valokuva otettu 21.4.2015.

- [32] C. J. Rodriguez-Solano, U. Hugentobler, P. Steigenberger, *Impact of Albedo Radiation on GPS Satellites*, Institute for Astronomical and Physical Geodesy. Saatavissa (viitattu 26.10.2014): [http://acc.igs.org/orbits/albedo-gps-TUM\\_IAG09pro2.pdf](http://acc.igs.org/orbits/albedo-gps-TUM_IAG09pro2.pdf)
- [33] Carlos J Rodriguez-Solano, U. Hugentobler, Peter Steigenberger, *Precise GNSS orbit determination using an adjustable box-wing model for solar radiation pressure*. Saatavissa (viitattu 9.4.2015): [http://www.researchgate.net/publication/267216196\\_Precise\\_GNSS\\_orbit\\_determination\\_using\\_an\\_adjustable\\_box-wing\\_model\\_for\\_solar\\_radiation\\_pressure](http://www.researchgate.net/publication/267216196_Precise_GNSS_orbit_determination_using_an_adjustable_box-wing_model_for_solar_radiation_pressure)
- [34] Mari Seppänen, Juha Ala-Luhtala, Simo Martikainen, Heikki Kosola, *GNSS satellite orbit prediction*, Tampereen Teknillinen Yliopisto, 2011.
- [35] Mari Seppänen, *GPS satelliitin radan ennustaminen*, Diplomityö 2010, Tampereen Teknillinen Yliopisto, 2014. Saatavissa (viitattu 2.11.2014): <http://URN.fi/URN:NBN:fi:tty-2011051914680>
- [36] Jiadong Sun, Wenhai Jiao, Haitao Wu, Chuang Shi, *China Satellite Navigation Conference (CSNC) 2013 Proceedings*, 1. painos, Springer Heidelberg New York Dordrecht London, 2013, 764 s.
- [37] Simo Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*, Cambridge University Press, 2013, 232 s. Saatavissa (viitattu 28.4.2015): [http://becs.aalto.fi/~ssarkka/pub/cup\\_book\\_online\\_20131111.pdf](http://becs.aalto.fi/~ssarkka/pub/cup_book_online_20131111.pdf)
- [38] Texasin Austinin yliopisto, Geologisten tieteiden laitos, *The global energy balance*, luentomateriaali. Saatavissa (viitattu 12.4.2015): <http://www.geo.utexas.edu/courses/387h/Lectures/chap2.pdf>
- [39] U.S. National Geospatial-Intelligence Agency, *EGM2008 Model Coefficients*, Original Release, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 16.9.2014): [http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first\\_release.html](http://earth-info.nga.mil/GandG/wgs84/gravitymod/egm2008/first_release.html)
- [40] U.S. National Geospatial-Intelligence Agency, *NGA GPS Satellite Precise Ephemeris (PE) - Center of Mass*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 26.1.2015): <http://earth-info.nga.mil/GandG/sathtml/PEexe.html>
- [41] U.S. National Coordination Office, *Official U.S. Government information about the Global Positioning System (GPS) and related topics: GPS accuracy*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 14.1.2015): <http://www.gps.gov/systems/gps/performance/accuracy/>

- [42] U.S. National Coordination Office, *Official U.S. Government information about the Global Positioning System (GPS) and related topics: Space Segment*, verkkosivu. Saatavissa (viitattu 26.1.2015): <http://www.gps.gov/systems/gps/space/>
- [43] Richard E. Williamson, Hale F. Trotter, *Multivariable Mathematics*, 4. painos, Pearson Education Inc, Upper Saddle River, New Jersey 2014, 838 s.

## A. LIITETAULUKOT

### RATAENNUSTUSTILASTOISTA

Taulukko A.1: GPS satelliittien 1 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S), box-wing SRP-korjaus (+Bw.) ja lopuksi Venuksen ja Jupiterin voimavuorovaikutus (+Pl.). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

Typ	kvantiili 50%							kvantiili 95%						
	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT
2 R	0.69	0.67	0.53	0.55	0.56	0.54	-21%	1.35	1.31	1.23	1.21	1.19	0.99	-27%
3 A	0.51	0.50	0.43	0.42	0.33	0.26	-49%	1.13	1.01	0.72	0.72	0.68	0.65	-43%
4 A	0.61	0.59	0.49	0.48	0.43	0.39	-36%	1.25	1.25	0.95	0.96	0.92	0.84	-33%
5 RM	0.55	0.51	0.45	0.44	0.44	0.44	-19%	1.14	1.06	0.83	0.82	0.82	0.82	-27%
6 A	0.50	0.50	0.43	0.42	0.36	0.30	-40%	1.10	1.01	0.71	0.72	0.66	0.64	-42%
7 RM	0.43	0.40	0.38	0.37	0.34	0.41	-4.6%	1.21	1.11	0.57	0.58	0.56	0.62	-49%
9 A	0.52	0.53	0.50	0.51	0.50	0.46	-13%	0.98	1.00	0.78	0.83	0.83	0.95	-3.1%
10 A	0.48	0.44	0.41	0.39	0.36	0.34	-30%	1.01	1.01	0.68	0.74	0.70	0.69	-32%
11 R	0.51	0.51	0.38	0.39	0.39	0.40	-23%	0.95	0.99	0.70	0.71	0.71	0.71	-25%
12 RM	0.53	0.54	0.47	0.48	0.48	0.48	-10%	1.27	1.25	0.90	0.92	0.92	0.92	-27%
13 R	0.50	0.46	0.48	0.48	0.41	0.39	-23%	1.18	1.16	0.70	0.67	0.60	0.64	-45%
14 R	0.46	0.42	0.39	0.41	0.33	0.37	-18%	1.11	1.11	0.71	0.68	0.58	0.62	-44%
15 RM	0.41	0.40	0.30	0.33	0.30	0.34	-17%	1.10	1.09	0.74	0.73	0.68	0.69	-37%
16 R	0.45	0.43	0.38	0.37	0.42	0.56	22%	1.37	1.24	0.70	0.68	0.71	0.80	-41%
17 RM	0.64	0.67	0.61	0.58	0.54	0.56	-12%	1.35	1.37	1.23	1.19	1.22	1.41	4.3%
18 R	0.63	0.60	0.58	0.55	0.51	0.56	-11%	1.22	1.17	0.93	0.96	0.95	1.13	-7.5%
19 R	0.67	0.59	0.52	0.51	0.54	0.53	-22%	1.27	1.34	1.08	1.07	1.03	0.84	-34%
20 R	0.62	0.60	0.56	0.57	0.48	0.48	-22%	1.16	1.14	0.88	0.87	0.88	1.08	-7.1%
21 R	0.74	0.70	0.55	0.55	0.56	0.53	-29%	1.68	1.58	1.27	1.30	1.28	1.17	-30%
22 R	0.54	0.50	0.44	0.44	0.38	0.41	-23%	1.07	1.09	0.87	0.88	0.92	1.11	4.0%
23 R	0.43	0.43	0.42	0.44	0.37	0.36	-18%	1.24	1.24	0.65	0.66	0.60	0.63	-49%
26 A	0.51	0.50	0.40	0.42	0.37	0.36	-29%	1.12	1.02	0.67	0.66	0.63	0.64	-42%
28 R	0.61	0.60	0.48	0.46	0.44	0.52	-15%	1.33	1.27	1.21	1.16	1.14	1.23	-8.1%
29 RM	0.59	0.58	0.46	0.47	0.47	0.47	-21%	1.35	1.34	1.18	1.17	1.17	1.17	-13%
30 A	0.63	0.58	0.49	0.49	0.43	0.36	-43%	1.09	1.09	0.87	0.82	0.78	0.78	-29%
31 RM	0.45	0.43	0.37	0.36	0.30	0.31	-32%	1.23	1.25	0.88	0.94	0.93	1.00	-19%
32 A	0.51	0.46	0.42	0.42	0.42	0.42	-18%	0.93	0.91	0.69	0.74	0.74	0.74	-20%
KA	0.46	-4.1%	-13%	0.1%	-6.7%	0.5%	-22%	1.01	-2.4%	-26%	0.5%	-2.4%	3.0%	-27%

Taulukko A.2: GPS satelliittien 7 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S), box-wing SRP-korjaus (+Bw.) ja lopuksi Venuksen ja Jupiterin voimavuorovaikutus (+Pl.). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

Typ	kvantiili 50%							kvantiili 95%						
	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT
2 R	5.49	5.46	4.85	5.07	5.09	4.59	-16%	9.18	9.00	8.82	8.76	8.61	7.59	-17%
3 A	4.46	4.32	4.22	4.35	3.62	3.48	-22%	8.25	8.65	7.85	7.68	7.22	7.31	-11%
4 A	5.07	4.73	4.58	4.72	4.61	4.39	-13%	11.7	12.0	11.3	11.8	11.4	10.9	-7.1%
5 RM	3.60	3.56	3.43	3.42	3.42	3.42	-5.0%	7.62	6.85	6.32	6.09	6.09	6.08	-20%
6 A	3.73	3.57	3.10	2.98	2.57	2.44	-35%	8.97	8.68	8.90	9.36	9.50	10.0	12%
7 RM	2.97	2.53	2.09	2.01	2.14	2.87	-3.5%	8.20	7.92	5.06	5.15	4.84	5.37	-35%
9 A	4.45	4.31	4.00	3.96	3.64	3.57	-20%	9.58	9.71	10.4	10.9	10.8	11.0	14%
10 A	3.71	3.64	3.50	3.46	2.95	2.88	-22%	7.59	7.99	8.01	8.46	8.48	8.86	17%
11 R	3.52	3.52	3.31	3.36	3.36	3.36	-4.6%	7.25	7.26	5.76	5.87	5.87	5.89	-19%
12 RM	4.26	4.32	3.81	3.93	3.93	3.93	-7.8%	7.80	7.79	5.94	5.88	5.88	5.89	-25%
13 R	3.59	3.44	3.18	3.41	2.86	2.86	-20%	8.04	8.43	5.70	5.29	4.78	4.44	-45%
14 R	2.77	2.57	1.98	1.96	2.02	2.73	-1.5%	7.84	7.38	5.45	4.99	4.37	4.27	-46%
15 RM	3.01	2.80	1.97	2.28	1.90	2.53	-16%	8.00	8.12	6.13	5.92	5.46	5.44	-32%
16 R	4.28	3.99	3.91	3.81	4.08	4.67	9.0%	10.9	10.3	7.10	6.98	6.83	7.70	-29%
17 RM	7.08	7.02	7.18	7.23	6.88	7.30	3.2%	13.1	13.0	12.5	12.0	11.3	11.2	-14%
18 R	5.37	5.31	4.84	4.85	4.88	5.50	2.5%	8.51	8.60	8.41	8.02	7.32	7.96	-6.5%
19 R	4.51	3.89	3.52	3.37	3.56	3.61	-20%	8.68	9.25	8.32	8.14	7.68	6.51	-25%
20 R	5.11	4.93	4.74	4.88	4.25	4.20	-18%	8.07	8.02	6.90	6.97	7.09	8.42	4.5%
21 R	4.94	4.58	4.63	4.42	4.02	3.57	-28%	11.2	11.7	10.3	10.1	10.0	9.14	-19%
22 R	3.70	3.63	3.40	3.10	3.15	3.59	-3.0%	8.45	8.44	7.74	7.81	7.87	9.05	7.2%
23 R	2.96	2.99	2.93	2.79	2.37	2.68	-9.7%	8.16	8.50	4.83	4.99	4.53	4.26	-48%
26 A	4.44	4.21	4.34	4.39	3.77	3.50	-21%	9.76	9.86	7.11	7.13	6.60	6.90	-29%
28 R	4.61	4.38	3.79	3.60	3.69	4.49	-2.6%	9.14	8.68	7.89	7.64	7.47	8.46	-7.4%
29 RM	5.04	4.97	4.70	4.98	4.98	4.99	-0.9%	9.81	10.5	8.86	8.70	8.70	8.70	-11%
30 A	6.95	6.85	6.86	6.97	7.01	7.02	1.1%	12.2	12.1	11.6	11.2	10.8	10.9	-11%
31 RM	4.13	3.74	3.11	2.79	2.86	3.35	-19%	9.48	9.47	7.64	7.94	7.81	8.26	-13%
32 A	5.54	5.32	5.01	5.19	5.19	5.19	-6.3%	12.0	12.8	11.3	11.8	11.8	11.8	-1.7%
KA	3.73	-4.0%	-6.6%	0.3%	-4.2%	3.8%	-11%	7.80	0.6%	-14%	-0.3%	-3.0%	1.5%	-15%

Taulukko A.3: GPS satelliittien 14 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE), Suhteellisuus-teoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S), box-wing SRP-korjaus (+Bw.) ja lopuksi Venuksen ja Jupiterin voimavuorovaikutus (+Pl.). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

Typ	kvantiili 50%							kvantiili 95%						
	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT	Va	+Ti	+DE	+A,S	+Bw.	+Pl.	YHT
2 R	13.2	13.1	13.0	13.6	12.8	11.5	-12%	21.9	20.6	20.1	19.7	19.3	18.3	-17%
3 A	13.3	13.3	14.3	14.1	12.8	12.5	-5.9%	29.1	30.1	31.2	31.1	30.4	31.3	7.7%
4 A	14.2	14.4	12.6	13.2	12.7	12.8	-9.6%	39.5	38.6	38.3	39.2	39.2	39.6	0.1%
5 RM	7.73	7.64	6.98	7.19	7.19	7.20	-6.8%	15.8	14.7	14.1	13.3	13.3	13.3	-16%
6 A	11.1	10.7	10.5	10.3	9.39	9.58	-14%	33.6	32.8	36.1	37.0	36.6	36.5	8.7%
7 RM	6.36	5.79	5.04	4.77	5.37	6.65	4.5%	17.9	18.3	14.0	13.2	12.8	13.6	-24%
9 A	11.6	11.0	10.5	9.92	9.17	9.73	-16%	32.6	34.5	36.9	37.8	36.7	36.9	13%
10 A	9.91	10.1	9.03	9.14	8.45	8.53	-14%	28.7	30.0	29.3	29.8	31.2	31.0	8.1%
11 R	10.8	10.6	11.5	11.8	11.8	11.8	10%	25.8	24.4	24.3	25.2	25.2	25.3	-2.1%
12 RM	9.99	10.1	8.98	9.05	9.05	9.06	-9.3%	19.5	20.6	15.8	15.2	15.2	15.2	-22%
13 R	7.41	7.28	6.08	6.43	5.76	6.47	-13%	17.7	18.1	13.4	12.5	11.5	10.6	-40%
14 R	6.47	5.92	5.27	5.01	5.28	6.97	7.7%	18.3	16.8	13.2	12.3	10.9	10.9	-40%
15 RM	6.42	6.04	4.70	4.93	4.69	5.79	-9.8%	17.1	16.4	16.3	15.4	14.2	13.9	-19%
16 R	12.8	12.0	11.1	11.3	11.5	11.8	-7.3%	25.5	26.2	24.7	25.7	25.4	27.2	6.6%
17 RM	18.5	17.9	17.7	18.0	17.6	19.5	5.4%	41.6	42.9	42.2	41.3	39.9	39.8	-4.2%
18 R	12.4	11.8	11.2	11.0	11.6	13.5	8.8%	22.9	23.2	24.0	23.1	21.6	21.5	-6.3%
19 R	9.51	8.96	8.25	8.14	8.58	8.40	-12%	21.0	22.5	21.0	20.3	19.5	17.4	-17%
20 R	11.9	11.4	11.3	11.5	10.5	10.6	-11%	20.1	20.2	17.7	17.9	17.9	19.9	-0.9%
21 R	9.55	9.61	9.97	9.85	9.85	8.98	-5.9%	28.9	30.4	26.6	26.0	26.6	24.8	-14%
22 R	8.01	8.49	9.32	8.45	8.47	9.41	17%	22.0	21.2	20.8	20.0	20.4	22.4	2.0%
23 R	6.30	6.57	6.25	5.81	5.20	6.01	-4.7%	19.2	17.1	14.0	13.2	12.4	11.8	-39%
26 A	12.9	12.2	12.9	13.0	11.5	11.3	-12%	29.2	30.9	23.8	24.7	23.7	23.0	-21%
28 R	9.98	9.54	9.41	9.13	9.30	11.2	12%	20.5	19.6	19.3	19.2	18.2	20.5	-0.0%
29 RM	13.9	14.1	13.7	14.2	14.2	14.3	2.6%	27.8	29.6	25.6	24.8	24.8	24.8	-11%
30 A	27.1	26.8	26.0	26.2	26.4	26.7	-1.4%	41.5	41.1	43.3	43.8	45.0	45.3	9.3%
31 RM	12.6	12.5	12.0	12.2	12.2	13.0	3.2%	24.4	24.2	21.1	20.9	20.5	20.7	-15%
32 A	18.3	17.6	17.0	17.0	17.0	17.1	-6.4%	42.0	41.4	39.2	40.1	40.1	40.0	-4.8%
KA	9.75	-2.1%	-3.6%	0.2%	-2.3%	4.2%	-3.7%	22.0	0.3%	-5.7%	-0.5%	-1.6%	0.4%	-6.9%



Taulukko A.4: Glonass satelliittien 1 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S) ja tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

		kvantiili 50%					kvantiili 95%				
Typ		Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT
1	M	0.86	0.87	0.87	0.82	-5.3%	1.54	1.52	1.52	1.43	-7.1%
2	M	0.85	0.83	0.85	0.82	-3.9%	1.50	1.43	1.44	1.29	-14%
3	M	1.50	1.42	1.45	1.41	-5.7%	2.35	2.31	2.32	2.18	-7.2%
4	M	0.62	0.61	0.62	0.55	-11%	1.25	1.23	1.27	1.02	-18%
5	M	0.91	0.92	0.93	0.90	-1.2%	1.57	1.54	1.52	1.39	-11%
6	M	1.05	1.01	1.03	0.99	-5.9%	1.67	1.61	1.62	1.50	-11%
7	M	1.10	1.06	1.09	1.10	-0.5%	1.81	1.74	1.76	1.66	-8.1%
8	M	0.87	0.87	0.88	0.83	-5.2%	1.59	1.52	1.49	1.47	-7.5%
9	M	0.56	0.56	0.56	0.57	1.8%	1.19	1.22	1.19	1.10	-7.9%
10	M	0.63	0.60	0.62	0.55	-12%	1.15	1.17	1.19	1.02	-12%
11	M	0.68	0.68	0.68	0.67	-2.0%	1.45	1.44	1.48	1.32	-8.6%
12	M	0.65	0.65	0.66	0.62	-4.3%	1.22	1.22	1.25	1.06	-14%
13	M	0.61	0.62	0.63	0.57	-6.7%	1.16	1.15	1.19	1.07	-7.6%
14	M	0.64	0.63	0.62	0.58	-9.0%	1.22	1.26	1.21	1.12	-7.6%
15	M	0.57	0.57	0.58	0.52	-9.0%	1.15	1.17	1.15	0.97	-16%
16	M	0.62	0.63	0.64	0.60	-3.7%	1.24	1.19	1.21	1.03	-17%
17	M	0.68	0.63	0.65	0.60	-11%	1.42	1.42	1.48	1.36	-4.3%
18	M	0.52	0.51	0.51	0.44	-15%	1.23	1.15	1.20	0.99	-20%
19	M	0.51	0.51	0.51	0.41	-20%	1.16	1.09	1.11	1.01	-14%
20	M	0.67	0.63	0.66	0.57	-15%	1.33	1.32	1.36	1.07	-20%
21	M	0.58	0.58	0.60	0.51	-11%	1.31	1.26	1.27	1.11	-15%
22	M	0.51	0.53	0.53	0.46	-9.2%	1.24	1.18	1.23	0.96	-23%
23	M	0.52	0.50	0.51	0.44	-16%	1.23	1.20	1.24	1.00	-18%
24	M	0.54	0.53	0.53	0.45	-16%	1.25	1.20	1.24	1.08	-14%
KA		0.72	-1.8%	1.7%	-7.2%	-7.4%	1.39	-2.1%	1.2%	-11%	-12%

Taulukko A.5: Glonass satelliittien 7 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S) ja tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

		kvantiili 50%					kvantiili 95%				
Typ		Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT
1	M	8.00	7.88	7.86	7.61	-4.8%	14.7	14.4	14.6	14.1	-3.9%
2	M	9.31	9.50	9.16	9.92	6.6%	14.8	14.3	14.7	15.3	3.1%
3	M	11.4	11.4	11.6	11.2	-2.1%	18.1	17.6	18.0	18.1	0.3%
4	M	5.87	6.11	6.22	5.84	-0.5%	14.1	13.4	13.8	12.2	-14%
5	M	6.77	6.93	6.84	7.04	3.9%	12.6	12.2	12.6	12.1	-4.1%
6	M	9.22	9.36	9.45	9.17	-0.6%	15.7	15.6	15.9	15.9	0.9%
7	M	9.02	8.81	8.73	8.76	-2.9%	16.5	15.5	15.9	15.8	-4.1%
8	M	7.09	7.06	7.15	6.98	-1.6%	13.0	12.1	12.4	12.7	-2.1%
9	M	6.47	6.64	6.76	6.94	7.3%	13.4	13.7	13.9	12.7	-4.8%
10	M	7.53	7.29	7.31	7.59	0.8%	13.6	13.8	14.1	13.2	-3.2%
11	M	6.12	6.02	6.13	6.20	1.3%	13.5	13.7	13.4	12.6	-6.3%
12	M	4.94	5.14	5.10	4.70	-4.7%	9.47	9.53	9.58	8.39	-11%
13	M	5.57	5.58	5.68	5.37	-3.7%	12.4	12.7	12.6	11.9	-4.4%
14	M	6.01	6.20	6.11	5.96	-0.8%	12.9	12.7	12.6	12.2	-5.6%
15	M	5.05	4.88	5.11	4.93	-2.4%	10.2	10.4	10.8	9.87	-3.0%
16	M	5.22	5.22	5.29	5.49	5.3%	11.4	11.2	11.6	10.5	-7.8%
17	M	5.82	5.74	5.87	5.52	-5.2%	12.8	12.6	12.9	12.2	-4.9%
18	M	5.96	6.05	5.86	5.82	-2.4%	12.1	11.9	11.9	10.7	-12%
19	M	6.95	6.92	7.04	7.21	3.8%	13.4	13.0	13.1	13.1	-2.4%
20	M	5.81	5.76	5.79	5.58	-3.9%	11.2	11.4	11.8	10.8	-3.2%
21	M	4.41	4.43	4.47	4.10	-7.0%	10.2	10.5	10.7	10.0	-2.1%
22	M	4.99	4.89	4.93	4.92	-1.3%	11.8	11.5	11.9	10.4	-12%
23	M	4.46	4.09	4.34	3.99	-10%	10.9	10.7	10.9	9.95	-9.0%
24	M	5.69	5.61	5.63	5.40	-5.1%	12.5	12.8	12.8	11.3	-9.2%
KA		6.57	-0.2%	0.6%	-1.4%	-0.9%	13.0	-1.3%	1.7%	-5.3%	-4.9%

Taulukko A.6: GLONASS satelliittien 14 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S) ja tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen.

		kvantiili 50%					kvantiili 95%				
Typ		Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT
1	M	22.2	21.8	21.9	21.6	-2.9%	39.8	39.5	40.4	38.2	-3.9%
2	M	38.3	38.9	38.7	40.4	5.5%	49.1	50.4	50.6	52.4	6.7%
3	M	25.4	25.0	25.5	24.9	-2.2%	43.7	44.2	44.9	44.0	0.7%
4	M	21.1	21.3	21.0	21.2	0.5%	42.6	41.6	42.5	39.5	-7.3%
5	M	14.9	14.9	15.0	14.7	-1.6%	29.9	29.1	29.8	30.4	1.7%
6	M	27.8	28.5	28.2	28.4	2.1%	44.4	44.1	44.6	44.2	-0.5%
7	M	24.1	25.2	25.0	24.8	2.9%	45.4	44.8	45.4	45.0	-0.9%
8	M	17.0	16.7	16.7	16.5	-3.5%	33.4	32.5	32.6	32.2	-3.7%
9	M	24.3	24.3	24.2	24.5	0.9%	43.7	43.7	43.6	42.8	-2.1%
10	M	27.7	27.5	27.4	27.4	-0.9%	42.1	42.9	42.7	41.2	-2.2%
11	M	16.9	16.7	17.2	17.4	2.6%	36.5	35.2	35.4	34.5	-5.5%
12	M	10.5	10.6	10.8	10.1	-3.8%	22.2	22.5	23.0	22.0	-0.7%
13	M	18.0	18.0	17.8	17.9	-0.3%	36.9	37.9	38.1	36.2	-1.7%
14	M	19.1	19.1	19.1	19.8	3.7%	39.3	40.1	39.4	39.3	0.1%
15	M	12.8	12.7	12.7	12.8	0.3%	29.7	30.9	31.8	32.0	7.7%
16	M	14.4	14.1	14.0	14.6	1.2%	33.8	33.1	33.7	32.3	-4.7%
17	M	15.6	15.5	15.8	15.1	-3.2%	32.9	32.5	33.2	32.1	-2.3%
18	M	20.9	21.5	21.3	21.7	4.2%	32.9	33.0	33.6	32.0	-2.5%
19	M	28.1	28.9	28.5	28.3	0.9%	48.0	49.8	49.1	50.2	4.6%
20	M	17.1	16.6	16.9	16.8	-1.9%	30.5	30.8	30.4	28.9	-5.1%
21	M	10.8	11.1	11.0	11.2	3.6%	29.8	31.1	30.6	30.2	1.1%
22	M	16.5	16.6	16.5	16.9	2.4%	30.5	30.7	31.1	29.5	-3.5%
23	M	10.3	9.88	9.80	9.36	-9.2%	30.1	29.5	29.6	29.2	-3.0%
24	M	19.2	19.4	19.3	18.5	-4.0%	34.0	34.8	34.7	32.0	-5.8%
KA		19.7	0.4%	-0.2%	0.1%	0.4%	36.7	0.4%	0.7%	-2.3%	-1.2%

Taulukko A.7: Beidou satelliittien 1 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S) ja tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen. Satelliitin 13 tilasto on hyvin puutteellinen, sillä ephemerisdataa ei ollut saatavilla koko vuodelle.

Typ	kvantiili 50%					kvantiili 95%				
	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT
1 GEO	4.14	4.19	4.22	3.90	-5.9%	7.71	7.75	7.78	7.38	-4.3%
2 GEO	3.35	3.32	3.27	2.83	-15%	8.51	8.50	8.49	8.24	-3.1%
3 GEO	5.84	5.85	5.87	5.49	-5.9%	10.2	10.2	10.2	9.85	-3.3%
4 GEO	4.58	4.61	4.65	4.50	-1.8%	7.80	7.84	7.90	7.21	-7.6%
5 GEO	4.12	4.10	4.07	3.53	-14%	7.50	7.47	7.44	6.65	-11%
6 IGSO	1.05	1.06	1.09	0.75	-28%	2.74	2.73	2.73	1.32	-52%
7 IGSO	0.89	0.90	0.94	0.35	-60%	2.31	2.34	2.38	1.04	-55%
8 IGSO	0.85	0.84	0.83	0.49	-42%	2.11	2.08	2.10	1.20	-43%
9 IGSO	0.99	0.99	0.99	0.68	-31%	2.54	2.52	2.52	1.69	-33%
10 IGSO	0.84	0.84	0.85	0.34	-60%	2.21	2.24	2.21	1.09	-51%
11 MEO	0.50	0.49	0.51	0.37	-26%	1.37	1.39	1.40	0.93	-32%
12 MEO	0.46	0.47	0.47	0.32	-31%	1.36	1.33	1.35	0.87	-36%
13 MEO	0.61	0.56	0.59	0.48	-22%	1.47	1.35	1.41	0.94	-36%
14 MEO	0.56	0.56	0.58	0.38	-32%	1.48	1.41	1.46	1.02	-31%
KA	2.06	-0.0%	0.5%	-16%	-15%	4.23	-0.2%	0.4%	-17%	-17%

Taulukko A.8: Beidou satelliittien 7 päivän rataennusteet 50% (vasen puoli) ja 95% (oikea puoli) SISRE kvantiileilla. Vasemmalla oleva sarake kertoo vanhan voimamallin tuloksen (Va) ja tästä oikealle päin on lisätty korjauksia seuraavassa järjestyksessä: Kiinteän vuoromaan vaihtelut (+Ti), Suhteellisuusteoriakorjaus ja tasainen albedovoima (+A,S) ja tarkemmat Kuun ja Auringon paikat (+DE). Punainen ja sininen väri edustaa yli 5% muutosta. Oikeimman puoleisin sarake vertaa alkuperäistä ennustusvirhettä täydellä uudella voimamallilla laskettuun uuteen ennusteen virheeseen. Alimmalla rivillä on laskettu satelliittien kvantiilien keskiarvo ja keskimääräiset muutokset jokaisen korjauksen jälkeen. Satelliitin 13 tilasto on hyvin puutteellinen, sillä ephemerisdataa ei ollut saatavilla koko vuodelle.

Typ	kvantiili 50%					kvantiili 95%				
	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT	Va	+Ti	+A,S	+DE	YHT
1 GEO	34.9	35.1	35.5	32.8	-5.9%	58.7	58.9	59.2	58.6	-0.3%
2 GEO	31.5	31.7	31.9	28.1	-11%	60.4	60.5	60.6	61.0	1.0%
3 GEO	42.9	43.1	43.2	38.9	-9.3%	72.7	72.9	73.0	70.7	-2.8%
4 GEO	39.3	40.1	40.4	39.5	0.4%	67.3	67.6	68.0	61.2	-9.1%
5 GEO	30.3	30.4	30.5	26.4	-13%	47.5	47.6	47.5	46.6	-1.8%
6 IGSO	5.91	5.85	6.10	5.17	-12%	14.9	15.0	14.9	10.8	-27%
7 IGSO	5.61	5.51	5.50	2.51	-55%	14.6	14.7	14.9	9.35	-36%
8 IGSO	4.75	4.69	4.66	3.61	-24%	11.6	11.6	11.9	7.84	-33%
9 IGSO	5.73	5.73	5.67	4.99	-13%	14.7	14.6	14.7	12.0	-18%
10 IGSO	5.13	5.21	5.14	2.60	-49%	14.6	14.6	14.8	11.2	-23%
11 MEO	3.11	3.04	3.27	2.77	-11%	12.3	11.2	11.4	12.5	1.5%
12 MEO	3.06	2.96	3.04	2.61	-15%	10.5	9.81	9.86	8.20	-22%
13 MEO	3.26	3.12	3.29	2.97	-8.9%	9.95	8.47	8.88	7.03	-29%
14 MEO	3.39	3.34	3.42	2.54	-25%	10.1	10.2	10.2	8.10	-20%
KA	15.6	0.4%	0.8%	-12%	-11%	30.0	-0.5%	0.5%	-8.3%	-8.3%

## B. LIITE SOLID TIDE -KORJAUKSEN OHJELMAKOODISTA

Montenbruckin kiinteän vuoromaan vaihteluiden [27] ohjelmakoodi (kts. kappale 3.1), joka on sijoitettu geopotentialin laskemiseen tarkoitettuun funktioon:

```
% #####
k2 = [0.29525 0.29470 0.29801];
n = 2;
moonllr= ECEF2llr(rMoon);
sunllr = ECEF2llr(rSun);
moonc=4*7.347673e22/5.97209e24*(6371000/moonllr(3))^(n+1);
sunc=4*1.98855e30/5.97209e24*(6371000/sunllr(3))^(n+1);
Pmoon = [0.5*(3*(sin(moonllr(1)))^2-1) ...      %Legendre polynomials
          3*cos(moonllr(1))*sin(moonllr(1)) ...  %for moon
          3*(cos(moonllr(1)))^2];
Psun   = [0.5*(3*(sin(sunllr(1)))^2-1) ...      %Legendre polynomials
          3*cos(sunllr(1))*sin(sunllr(1)) ...  %for sun
          3*(cos(sunllr(1)))^2];
for m = 0:2
    temp = sqrt((n+2)*(factorial(n-m))^3/(factorial(n+m))^3);
    if m == 0
        delta = 1;
    else
        delta = 0;
    end
    unnorm = sqrt(factorial(m+n)/((2-delta)*(2*n+1)*factorial(n-m)));
    dC2m(m+1) = unnorm*k2(m+1)*moonc*Pmoon(m+1)*temp*cos(m*moonllr(2));
    dS2m(m+1) = unnorm*k2(m+1)*moonc*Pmoon(m+1)*temp*sin(m*moonllr(2));
    dC2s(m+1) = unnorm*k2(m+1)*sunc*Psun(m+1)*temp*cos(m*sunllr(2));
    dS2s(m+1) = unnorm*k2(m+1)*sunc*Psun(m+1)*temp*sin(m*sunllr(2));
end
dC2=dC2m+dC2s;
dS2=dS2m+dS2s;
C(3,1:3) = C(3,1:3) + dC2;
S(3,1:3) = S(3,1:3) + dS2;
% #####
```

IERS:n kiinteän vuoromaan vaihteluiden [16] ohjelmakoodi, joka on sijoitettu geopotentialin laskemiseen tarkoitettuun funktioon:

```
% #####
k2 = [0.29525 0.29470 0.29801];
n = 2;
moonllr= ECEF2llr(rMoon);
sunllr = ECEF2llr(rSun);
dC2moon=zeros(1,3);
dS2moon=zeros(1,3);
dC2sun=zeros(1,3);
dS2sun=zeros(1,3);
moonconst=0.2*7.347673e22/5.97209e24*(6371000/moonllr(3))^(n+1);
sunconst=0.2*1.98855e30/5.97209e24*(6371000/sunllr(3))^(n+1);
Pmoon = [0.5*(3*(sin(moonllr(1)))^2-1) ...      %Legendre polynomials
          3*cos(moonllr(1))*sin(moonllr(1)) ...  %for moon
          3*(cos(moonllr(1)))^2];
Psun = [0.5*(3*(sin(sunllr(1)))^2-1) ...      %Legendre polynomials
         3*cos(sunllr(1))*sin(sunllr(1)) ...  %for sun
         3*(cos(sunllr(1)))^2];
for m = 0:2
    temp = 1;
    if m == 0
        delta = 1;
    else
        delta = 0;
    end
    dC2moon(m+1) = k2(m+1)*moonconst*Pmoon(m+1)*temp*cos(m*moonllr(2));
    dS2moon(m+1) = k2(m+1)*moonconst*Pmoon(m+1)*temp*sin(m*moonllr(2));
    dC2sun(m+1) = k2(m+1)*sunconst*Psun(m+1)*temp*cos(m*sunllr(2));
    dS2sun(m+1) = k2(m+1)*sunconst*Psun(m+1)*temp*sin(m*sunllr(2));
end
dC2=dC2moon+dC2sun;
dS2=dS2moon+dS2sun;
C(3,1:3) = C(3,1:3) + dC2;
S(3,1:3) = S(3,1:3) + dS2;
% #####
```

## C. LIITE DE202 ALMANAKKATIEDOSTON LUKEVASTA OHJELMAKOODISTA

Alla on ohjelmakoodi, jolla voidaan lukea Chebychevin kertoimet DE202 almanakkatiedostosta (kts. kappale 3.2). Kyseiset funktiot lukevat almanakkatiedostosta Chebychevin kertoimet ja sijoittavat ne sopiviin vektoreihin, joista kasataan kolmesarakkeiset matriisit (x, y ja z koordinaatteja vastaten). Matriisit talletetaan OPT-muuttujaan, josta muut funktiot käyttävät matriiseja. Ohjelmaa käytettäessä tulee pitää huoli, että käytetään juuri oikean aikaintervallin matriisia, että lasketut planeettojen ja muiden taivaankappaleiden paikat ovat oikeat. Siis jos aikaintervalli vaihtuu, pitää näillä funktioilla päivittää kerroinmatriisit samoin, kuin kerroinmatriisit laskettaisiin ohjelman alussa.

```
%Getting Chebychev coefficients from ephemeris data.
%Uses DE202 -> output in ICRS coordinates (J2000)
function OPT = DE202toCheby(DE202,t_gps,OPT)
% OPT.VENUSmatrix-OPT.Subinterval8 data structure
% ts_beg, ts_end = subinterval8 start and end dates
% SEGMENT = the segment we are currently in Ephemeris data
% Sub8 = the subinterval8 we are in currently

EphstructN =[12 12 15 10 9 8 8 6 6 12 15 10];
EphstructK =[ 4 1 2 1 1 1 1 1 1 8 1 4];
%EphstructDim=[ 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 3 2];
EphstructStart=[ 3 147 183 273 303 330 354 378 396 414 702 747]+2;
%EphstructDT =32./EphstructK;
EphstructSize = 830; %(2+2+824+2empty) Numbers in between 2 segment
%                               beginnings, 2 date numbers, 824
%                               long segment, 2 empty fields.

% Changing to terrestrial time scale and calculating Julian date:
t_TT = t_gps + 51.1840;
JD_TT = GPS2JD(t_TT);
time = JD_TT;

Datalength=length(DE202)/EphstructSize;
%DE202 segment begin and end dates are Julian dates.
```



```

begindates=3:EphstructSize:length(DE202); %segment start date indexes
enddates=4:EphstructSize:length(DE202); %segment ending dates indexes

%looking for correct segment to begin reading ephemeris
temp=find(DE202(begindates) < time);

%how many segments are skipped from beginning of ephemeris file
%-> SEGMENT = the segment number in use.
SEGMENT=length(temp);
SegmentStartDate=DE202((SEGMENT-1)*EphstructSize+3);
SegmentEndDate=DE202((SEGMENT-1)*EphstructSize+4);
    Subinterval8=(SegmentEndDate-SegmentStartDate)/8;
    Subinterval8duration=Subinterval8;
    SubintervalDates8=SegmentStartDate:Subinterval8:SegmentEndDate;
    SubintervalDates4=SubintervalDates8([1 3 5 7 9]);
    SubintervalDates2=SubintervalDates8([1 5 9]);

%Next calculating at which subinterval8,4,2 we are in time... First
%subinterval is indexed as 0. -> (value = 0..7,0..3,0..1)
Subinterval8=8-length(find(time < SubintervalDates8)); %value = 0-7
Subinterval4=4-length(find(time < SubintervalDates4)); %0-3
Subinterval2=2-length(find(time < SubintervalDates2)); %0-1

%Getting Chebychev factors from ephemeris:
%Venus
%number=2
%dim=3
%subintervals=1 (Subinterval value = 0)
VENUSmatrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,...
    EphstructSize,DE202,SEGMENT,...
    2,3,0);
%Earth-Moon-Baryocenter
%number=3
%dim=3
%subintervals=2 (Subinterval2 value = 0-1)
EMBmatrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,...
    EphstructSize,DE202,SEGMENT,...
    3,3,Subinterval2);
%Jupiter
%number=5
%dim=3
%subintervals=1 (Subinterval value = 0)
JUPImatrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,...
    EphstructSize,DE202,SEGMENT,...
    5,3,0);
%Moon
%number=10

```

```

%dim=3
%subintervals=8 (Subinterval8 value = 0..7)
MOONmatrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,...
                    EphstructSize,DE202,SEGMENT,...
                    10,3,Subinterval8);

%Sun
%number=11
%dim=3
%subintervals=1 (Subinterval value = 0)
SUNmatrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,...
                    EphstructSize,DE202,SEGMENT,...
                    11,3,0);

OPT.VENUSmatrix = VENUSmatrix;
OPT.EMBmatrix = EMBmatrix;
OPT.JUPImatrix = JUPImatrix;
OPT.MOONmatrix = MOONmatrix;
OPT.SUNmatrix = SUNmatrix;

OPT.SEGMENT = SEGMENT;
OPT.Subinterval8 = Subinterval8;
OPT.Subinterval8_start = SubintervalDates8(Subinterval8+1);
OPT.Subinterval8_end = SubintervalDates8(Subinterval8+2);
OPT.Subinterval4_start = SubintervalDates4(Subinterval4+1);
OPT.Subinterval4_end = SubintervalDates4(Subinterval4+2);
OPT.Subinterval2_start = SubintervalDates2(Subinterval2+1);
OPT.Subinterval2_end = SubintervalDates2(Subinterval2+2);
OPT.SEGMENT_start = SegmentStartDate;
OPT.SEGMENT_end = SegmentEndDate;

%This loads desired data from ephemeris to small matrix. Asks for
% ephemeris structure, ephemeris and number of #BODY.
% Montenbruck & Gill: Satellite Orbits, page 75-76.
function matrix=loadDE202(EphstructN,EphstructStart,EphstructSize,...
                        DE202,SEGMENT,n,dim,subinterval)

matrix=zeros(EphstructN(n),dim);
for ii=1:dim
matrix(:,ii)= DE202(((SEGMENT-1)*EphstructSize+...
                    EphstructStart(n)+(ii+dim*subinterval-1)*EphstructN(n)):...
                    ((SEGMENT-1)*EphstructSize+...
                    EphstructStart(n)+(ii+dim*subinterval)*EphstructN(n)-1));
end

```